25/VII-79

НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕНИЕ

ВСЕСОЮЗНЫЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
ИМЕНИ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ISS N 0371-957X

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 237 (297)

НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
имени Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 237 (297)

Под редакцией *Ю. В. Тарбеева*

ЛЕНИНГРАД
1979

Настоящий сборник включает статьи, имеющие как прямое, так и косвенное отношение к теоретической метрологии. В них рассматриваются вопросы о единицах и размерностях, о методах оценивания погрешностей измерений, об основных метрологических характеристиках групповых эталонов, о роли фундаментальных физических констант, об особенностях воспроизведения и передачи размера единицы температуры — кельвина, а также вопросы, относящиеся к специальным областям метрологии.

УДК 389

Ю. В. ТАРБЕЕВ

ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ МЕТРОЛОГИИ

Научные исследования и изыскания, поиск новых закономерностей природы, изучение свойств веществ и материалов, исследования микромира и космоса, исследования в биофизике и медицине, в конечном счете, сводятся к измерениям, с помощью которых определяются количественные соотношения в изучаемых явлениях и вскрываются ранее неизвестные законы, получаются новые соединения, материалы, новые виды энергии. Возможности успешного решения проблем фундаментальных наук и создания новой техники в значительной мере определяются уровнем развития метрологии. В этой связи представляется необходимым рассматривать метрологию как самостоятельную научную дисциплину и определить основные пути развития ее теоретических основ.

С самого зарождения метрология, как наука, формировалась в тесной связи с практическими задачами науки и техники. К ней в полной мере относится утверждение, что «...технические науки начинают оформляться тогда, когда объект исследования — техника — обретает новую потенцию: она может развиваться только на основе научного познания законов природы... Эти знания служат затем важнейшим средством общего решения задачи конструирования частных технических объектов... Техническая наука — это теория использования объективных природных закономерностей в технических устройствах, удовлетворяющих общественную практическую потребность [1].

Метрология теснейшим образом связана и с фундаментальными науками. По мере ее развития и, прежде всего, тех ее разделов, которые относятся к механике, термодинамике, электричеству и магнетизму, появляются новые самостоятельные теоретические разделы метрологии, содержащие обобщающие знания, накопленные в процессе разработки и совершенствования методов и средств измерений соответствующих величин. Однако, анализируя результаты исследований, проведенных на протяжении последних десятилетий, следует отметить, что они представляют собой сумму отдельных научных знаний, моделей и методов, которые используются лишь непосредственно при решении «внутренних» для данной области измерений задач. Иначе говоря, для определенного этапа исследований характерно существование большого числа узкоспециализированных научных дисциплин и присущих им понятий и принципов, пригодных для использования и создания средств измерений в отдельных областях измерений.

Между тем теория технической науки, как известно [2—3], складывается как результат процесса сравнивания специфических для нее схем, моделей, представлений с идеальными объектами математики. Теоретическая метрология, как и всякая теоретическая наука, должна содержать, таким образом, большую группу специально организованных знаний и теорем фундаментальной науки, а также описание математических методов, которые используются для приведения одних объектов теории к другим. Теория должна иметь многочисленные предпосылки в виде опытных данных и эмпирических обобщений. Сложность создания единой теории измерений, равно как и теория метрологии, состоит в том, что, как раздел технической физики, метрология должна охватывать весь комплекс электромагнитных, оптических, механических, термодинамических, физико-химических, ядерно-физических и других явлений, а как наука техническая, должна иметь общие основы, определить политехнически трудноперечислимый круг измерительных преобразований. Именно этим объясняется тот факт, что несмотря на неослабевающий интерес к разработке общей теории измерений и созданию целостной теории метрологии, многочисленные [4—8] попытки в этом направлении пока не увенчались успехом. Причинами этого, по мнению автора, является и недостаточная для данного этапа теоретическая проработка такого важнейшего раздела метрологии, как теория эталонов, отсутствие значительных обобщений общеметрологического характера по результатам работ в отдельных областях измерений, интенсивное увеличение числа физических принципов преобразований физических величин, опережающие теоретические обобщения по их использованию.

Поскольку создание нового метода измерения происходит зачастую в условиях априорной неизвестности реальной модели измеряемого физического поля или физической величины, то метрология, как правило, обращается к соответствующему идеальному объекту физики. И только после того, как метод и средства измерений разработаны, объект начинает изучаться с помощью этих средств, что позволяет определять отклонения параметров объекта от идеального, выявлять его характерные воздействия на прибор, влияющие на результаты измерений.

Развитие теоретических основ метрологии, построение общей теории измерений затрудняется также и наличием в ряде случаев принципиальной физической неопределенности в решении некоторых ключевых проблем.

Безусловно важными являются дальнейшая разработка принципиально новых методов преобразования параметров физических полей и величин с целью получения максимально точной количественной информации об их значениях и выбор оптимальных физико-метрологических вариантов воспроизведения единиц физических величин на основе природных устойчивых явлений с использованием значений фундаментальных констант.

Общая теория измерений должна, таким образом, дать ответ на вопросы о взаимодействии средства измерений с полем физических величин в общем виде, а в отдельных областях измерений и о возможности построения средств измерения для различных условий существования этих полей и величин без их искажений.

Но это отнюдь не исключает необходимость проведения частных теоретических исследований в отдельных областях измерений (разделах метрологии), напротив, их необходимо и впредь всемерно развивать и углублять в интересах поставленной цели.

Примерами глубоких исследований, обеспечивающих перспективное развитие метрологии, общефизических наук и техники, могут служить исследования, выполненные к настоящему времени в области электромагнетизма, термодинамики, ионизирующих излучений, уточнения фундаментальных физических констант.

В 1964 г. во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева начали развертываться работы по уточнению и согласованию физических констант. К этому времени стало ясным, что согласование должно охватывать всю гамму взаимосвязанных констант, которые мы называем фундаментальными. Что касается их уточнения, то было решено остановиться на тех, которые возможно использовать для воспроизведения ряда важнейших единиц физических величин. Такими единицами являются килограмм, ампер и вольт. Причем решение вопроса о килограмме имеет более далекую перспективу. Остановимся поэтому, в первую очередь, на электрических единицах — ампере и вольте.

Воспроизведение ампера посредством токовых весов было и остается классическим способом воспроизведения в абсолютной мере. Однако, используя взаимную зависимость силы тока и гиромагнитного отношения протона (γ), измеренного в слабом и сильном поле, и определив отношение токов, создающих эти поля, можно получить значение тока в абсолютной мере.

Следует сказать, что, несмотря на простоту соотношений γ и I, сам эксперимент связан с большими трудностями, состоящими в том, что необходимо точно определять геометрические параметры соленоида (в опыте в слабом поле) и измерять уравновешивающую силу тяжести, что делает такой опыт не уступающим по трудности опыту с токовыми весами.

Новый этап наступил в метрологии тогда, когда оказалось возможным определять э.д.с. нормальных элементов без применения токовых весов на основе эффекта Джозефсона. Из теории этого эффекта вытекает, что на туннельном переходе, представляющем собой в общем виде два сверхпроводника, разделенных слоем диэлектрика, при облучении его полем СВЧ, возникает напряжение u, значение которого на переходе определяется выражением

$$u = n\frac{h}{2e}\nu ,$$

где $\frac{h}{2e}$ — отношение постоянной Планка к удвоенному элементарному заряду (квант магнитного потока);

n — ступень вольт-амперной характеристики (целое число);

ν — частота облучающей энергии.

Квант магнитного потока может быть выражен через величины неэлектрического происхождения. Тогда точность его определения будет в основном зависеть от числа Авогадро N и постоянной тонкой структуры α. Погрешность определения этих величин не должна превышать 10^{-7} [9]. Для N она должна быть еще меньше, если иметь в виду в последующем переход на естественный эталон массы — килограмма.

Более подробно роль фундаментальных физических констант в современной метрологии рассматривается в настоящем сборнике в статье С. В. Горбацевича.

Одной из важных для физических исследований является задача измерения термодинамических температур, однако признание того факта, что все измерения температур должны проводиться по термодинамической температурной шкале (ТТШ) еще не обеспечивает возможности осуществлять измерения без соответствующих эталонов.

В НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» начата разработка нового газового термометра для диапазона 90÷1338 К. Создание на его основе первичного эталона единицы термодинамической температуры позволит решить проблему построения ТТШ для этой области температур.

Точность определения абсолютной температуры с помощью газового термометра связана с теоретическими представлениями о моделях межмолекулярных сил, с теорией вириального уравнения состояния реальных газов, в том числе чистых веществ и смесей газов. В настоящее время точность определения газовой постоянной, вириальных коэффициентов азота, кислорода, гелия и других газов не позволяет достичь соответствующей точности значений термодинамических функций и ограничивает, в свою очередь, точность измерений с применением газового термометра. Развитие методов молекулярной динамики, создание новых методов экспериментального определения вириальных коэффициентов с использованием газового термометра, определение универсальной газовой постоянной позволят получить ряд новых фундаментальных результатов.

Повышение точности определения газовой постоянной и числа Авогадро даст возможность получить более точное значение для постоянной Больцмана — второй постоянной в законе излучения Планка, что очень важно для построения высокотемпературной термодинамической шкалы и для многих термодинамических расчетов.

Число указанных примеров можно существенно расширить, однако мы ограничимся упоминанием лишь еще одного — из области механики. Достижения метрологии, как уже было сказано, зачастую приводят к коренному изменению представлений общефизического плана. Так, при измерении вакуума обычно пользовались понятием остаточного абсолютного давления и это до определенного периода удовлетворяло практические потребности. Однако, когда во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева был создан государственный специальный эталон и комплекс образцовой аппаратуры, обеспечивающие измерения низких абсолютных давлений в диапазоне 10^3—10^{-10} Па, то было установлено, что в области сверхвысокого вакуума величиной, фактически поддающейся измерению, является не абсолютное давление, а концентрация газовых молекул, оставшихся в объеме измерительной системы. Необходимость дальнейшего повышения точности измерения данного параметра привела к поиску физического метода, позволяющего измерять именно число частиц. В настоящее время создается измерительная система, основанная на этом принципе.

Равным образом представляется необходимым теоретически осмыслить использование принципа изоморфности применительно к другим областям измерений, таким, например, как измерение заряда, осуществляемое ныне посредством измерения значения тока. Совершенно очевидно, что изоморфизм существует лишь до известных пределов развития техники и физического эксперимента.

Из всего сказанного вытекает необходимость проведения углубленного специального анализа развития современной метрологии в тесной связи с фундаментальной физикой, химией, механикой, математикой и естественного влияния как метрологии на эти науки, так и фундаментальных наук на метрологию.

В настоящем сборнике обобщены результаты некоторых теоретических работ, выполненных во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева в области фундаментальных задач метрологии, связанных с построением систем эталонов в области электромагнетизма и термодинамики, а также работ, касающихся теории систем единиц, инвариантности понятий о физических величинах, и работ по созданию групповых эталонов и методов оценивания погрешностей измерений. Дальнейшее развитие теоретических основ метрологии является предметом целенаправленной работы ученых института и будет содействовать удовлетворению потребностей науки, техники и промышленности в прецизионных измерениях физических величин и технических параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Комаров В. Д.** Специфика предмета технических наук. — В кн. «Научно-техническая революция и некоторые методологические проблемы технических наук». Л., 1970.
2. **Горохов В. Г., Розин В. М.** К вопросу о специфике технических наук в системе научного знания. — Вопросы философии, 1978, № 9.
3. **Омельяновский М. Э.** Диалектика революций в физической науке и фундаментальные идеи ее основных теорий. — Вопросы философии, 1978, № 9.
4. **Кавалеров Г. И., Мандельштам С. М.** Введение в информационную теорию измерений. — М., «Энергия», 1974.
5. **Розов М. А.** Предмет автометрии как научной дисциплины. — В кн. «Проблемы электрометрии». Новосибирск, «Наука», 1967.
6. **Широков К. П.** Об основных понятиях метрологии. — Труды метрологических институтов СССР, вып. 130 (190), 1972.
7. **Терао М.** Попытки систематизации теории измерений, ч. 2. — «Кэйсоку то сэйгё», 1976, т. 15, № 1.
8. **Моримура С.** Попытки систематизации теории измерений, ч. 2. — «Кэйсоку то сойгё», 1976, т. 15, № 1.
9. **Горбацевич С. В., Холин В. М.** Воспроизведение абсолютного вольта через физические константы с использованием эффекта Джозефсона. — Измерительная техника, 1974, № 23.
10. **Арутюнов В. О.** Основы совершенствования системы эталонов единиц электрических величин. — Измерительная техника, 1974, № 10.

Поступила в редакцию
05.12.1978 г.

УДК 53.08

К. П. ШИРОКОВ

О НЕКОТОРЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

В последние годы в связи с созданием и совершенствованием Международной системы единиц особую актуальность приобрели вопросы, относящиеся к принципам построения систем единиц. Стала очевидной необходимость уточнения и развития представлений о связях между физическими величинами, размерностях и единицах. В настоящей статье кратко изложены представления по трем указанным разделам теории измерений, сформулированные в результате анализа имеющейся литературы и выполнения специальной темы.

Физические величины и связи между ними

Материальный мир состоит из множества объектов, существующих вместе со всеми их свойствами, проявляющимися при взаимодействии объектов друг с другом. Особенности объектов, поддающиеся количественному выражению в некоторых единицах, получили название физических величин. Измерения позволяют получить знания о них, однако они объективно существуют «сами по себе», независимо от того, измеряем мы их или нет [1].

Физические величины относятся к фундаментальным понятиям метрологии, так как они являются необходимыми элементами всякого измерения. При каждом измерении имеют дело с величиной, характеризующей некоторое свойство или состояние конкретного материального объекта или явления (например, с конкретной длиной, массой и т. д.). С другой стороны, при выражении физических закономерностей величину понимают как особенность, в качественном отношении общую множеству объектов или явлений, т. е. в обобщенном смысле (как длину вообще, массу вообще и т. д.). Таким образом, понятие «величина» может истолковываться в двояком смысле: как конкретная величина и как обобщенная величина.

Количественное представление о конкретной величине дает ее значение

$$X = \{X\}[X]. \qquad (1)$$

где $\{X\}$ — числовое значение (отвлеченное число); $[X]$ — единица величины X.

Небольшую группу величин, которые можно выделить и измерять независимо от других, принимают за основные, и через них вводят все остальные величины, называемые производными. Основные и производные величины в совокупности образуют систему величин. Например, для описания явлений механики используется система величин с основными величинами: длиной l, массой m и временем t.

Производные величины чаще всего вводят с помощью определяющих уравнений, имеющих алгебраическую форму

$$X = ZX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\ldots X_n^{\alpha_n} = Z\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}, \qquad (2)$$

где X — определяемая производная величина; $X_1, \ldots, X_n$ — величины, через которые она определяется; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — отвлеченные числа.

Так например, плотность вещества ρ определяют с помощью уравнения

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m — масса порции вещества; V — ее объем.

Аргументы X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ могут быть как основными, так и производными величинами. Между величинами данной совокупности может быть много перекрестных связей.

Если все величины, участвующие в уравнении (2), уже были ранее введены, оно перестает быть определяющим и должно рассматриваться как опытный закон, т. е. как связь между величинами, установленная экспериментально.

Как обосновано в [2], физические уравнения следует рассматривать как описания в математической форме связей между величинами, реально существующих в материальных объектах или физических явлениях. Отсюда следует, что физические уравнения содержат не только количественную, но и качественную информацию о связях между свойствами объектов. Этим физические уравнения отличаются от уравнений чистой математики, которые оперируют с отвлеченными числами, т. е. выражают чисто количественные соотношения, абстрагированные от какого бы то ни было качества. Иной, чем в математике, смысл имеют действия над физическими величинами. Так, в уравнении для плотности ρ деление массы на объем указывает на то, что плотность — это такая величина, которая пропорциональна массе порции вещества и обратно пропорциональна ее объему.

Физические уравнения следует рассматривать не сами по себе, а в связи с моделями объектов или явлений, которые они описывают. В соответствии с этим символам в уравнениях можно придавать смысл обобщенных величин, если рассматривается некоторое множество объектов, или конкретных величин в случае конкретного объекта. Можно также придавать символам смысл оценок, отражений величин в сознании, т. е. их значений по формуле (1).

На практике символам часто придают смысл числовых значений величин (отвлеченных чисел), но в этом случае уравнения теряют свое физическое содержание и называются уравнениями связи между числовыми значениями

$$\{X\} = \zeta \prod_{i=1}^{n} \{X\}^{m_i} \qquad (3)$$

где $\{X\}$, $\{X_i\}$ — числовые значения величин X, X_i $(i=1, 2, ..., n)$; ζ — числовой коэффициент.

Деление (2) на (3) дает уравнение связи между единицами

$$[X] = z \prod_{i=1}^{n} [X_i]^{m_i}, \qquad (4)$$

где $z = Z/\zeta$. В случае когерентных единиц $z = [Z]$ и $\zeta = \{Z\}$. Если коэффициент Z безразмерный (отвлеченное число), то $z = 1$ и $\zeta = Z$.

Уравнения (2) и (3) имеют еще и то существенное различие, что в первом коэффициенте Z не зависит от выбора единиц, в которых выражены величины, коэффициент же второго — ζ — целиком от него зависит.

В [2] предложено следующее обоснование выбора коэффициентов в определяющих физических уравнениях. Уравнения, описывающие различные модели объектов, имеют различную форму (различные коэффициенты Z). Например, площади S различных геометрических фигур определяют формулами: в случае прямоугольника — $S_{пр} = ab$, треугольника — $S_{тр} = \frac{1}{2} ab$, эллипса — $S_{эл} = \pi ab$, где a, b — характеристические параметры моделей (аргументы). Простейшей моделью объекта для определения площади (геометрической фигурой) является прямоугольник, и общепринято принимать коэффициент Z в ее уравнении равным единице.

Обобщая, можно сформулировать правило, что рационально (хотя это делают не всегда) принимать коэффициент $Z = 1$ в уравнении, описывающем простейшую модель, которую будем называть головной.

Если уравнение определяет новую физическую величину через уже известные, коэффициент в нем не имеет размерности (есть отвлеченное число). Если же уравнение представляет собой опытный закон, устанавливающий соотношение между введенными ранее величинами, то коэффициент Z может иметь размерность. Обычно это универсальная постоянная, определяемая опытным путем с ограниченной точностью. К таким постоянным относятся гравитационная постоянная G, постоянная Больцмана k, постоянная Планка h, скорость света в вакууме c и др.

Если при определении некоторой производной величины переходят от одной головной модели к другой, в уравнении для прежней головной модели коэффициент Z приобретает значение, не равное единице. Происходит изменение формы уравнений и для всех других, неголовных, моделей. Поскольку при переводе головной модели в категорию неголовной обычно сохраняют прежние характеристические параметры, определяемая величина не изменяется ни по своей природе, ни по размеру. В этом выражается принцип инвариантности величин по отношению к форме определяющих уравнений (смене головной модели). При изменении формы определяющего уравнения изменяется не понятие о величине, а лишь размер ее единицы. Все это позволяет дать простое толкование рационализации уравнений электромагнитного поля, которая до сих пор вызывает дискуссии. При рационализации происходит смена некоторых головных моделей, при этом, как уже говорилось, величины остаются инвариантными, изменяется лишь размер единиц некоторых величин, для которых определяющие уравнения изменяют форму. Поэтому нет надобности, как это иногда делается в литературе, вводить какие-то особые «рационализованные» и «нерационализованные» величины, достаточно иметь два комплекта единиц, отличающиеся только их размерами, для рационализованной формы уравнений и для нерационализованной.

Размерности физических величин

В литературе распространено мнение, что размерности относятся к единицам. Однако в новых работах все чаще размерности приписывают величинам. Этот взгляд нашел отражение и в международном стандарте ИСО 31/0.

Подробный анализ точек зрения на размерности, проведенный автором, привел к заключению, что размерности в равной мере можно отнести и к величинам, и к их единицам, так как единицы являются частными случаями величин. Однако такое подразделение размерностей на два вида ничего нового не вносит, и можно оперировать одним лишь понятием размерности величины.

Размерность можно трактовать как условную характеристику величины, имеющую форму степенного одночлена с коэффициентом, равным единице, и отражающую связь величины с величинами, принятыми в данной системе за основные. Условность размерности связана с условностью выбора группы основных величин. Между тем, само понятие о величине не зависит от выбора основных величин и системы единиц, откуда логически вытекает возможность преобразования размерностей при переходе от одной размерной системы к другой. Отсюда, в свою очередь, следует, что различные единицы одной и той же величины можно переводить с помощью безразмерных множителей даже в тех случаях, когда единицы относятся к системам с различным числом основных единиц (например, к системам СГС и МКСА). Это означает, что нет надобности писать в соотношениях между единицами знак соответствия ($\triangleq$) вместо знака равенства (=), как это иногда делают.

Единицы физических величин

Объективная количественная информация о конкретной физической величине может быть получена только путем выражения этой величины в принятых единицах. Для получения такой информации необходимы измерения величин, а они, в свою очередь, не могут выполняться без средств измерений. Последние являются связующим звеном между реальностью (измеряемыми величинами) и познанием этой реальности (т. е. значениями измеряемых величин), следовательно, в средствах измерений должны быть материализованы единицы, в которых хотят выразить величины.

Материализуют единицу путем ее воспроизведения с помощью эталона и передачи от него размера единицы всем остальным средствам измерений данной величины. Лишь после этого становятся возможными измерения, дающие сопоставимые результаты.

Таким образом, единица может существовать в двух формах: как конкретная реализация величины (материализованная единица) и как знание, представление об этой реализации. В последней форме она входит множителем в значение величины, определяемое в результате измерения. Очевидно, что по своей природе единица не отличается от величины, которую через нее выражают.

Единицы целесообразно устанавливать для некоторой совокупности (системы) величин, в соответствии со связывающими эти величины зависимостями. Получают систему единиц, состоящую из небольшой группы основных единиц, выбираемых произвольно, и производных единиц для всех остальных величин.

Основные единицы устанавливаются по международным соглашениям; менее освещен в литературе механизм образования производных единиц. Для этой цели используют уравнения, определяющие соответствующие производные величины. В работе [3] рассмотрен механизм образования производной единицы при введении понятий модели объекта и ее характеристических параметров. Единицу можно образовать как по головной, так и по неголовной модели, при этом могут быть выбраны единичные или неединичные характеристические параметры.

Пусть поставлена задача образовать когерентную единицу величины X, определяемой уравнением (2). Для головной модели ($Z=1$) оно примет форму

$$X=\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i} \quad . \tag{5}$$

При единичных характеристических параметрах $\{X_i\}=1$ ($i=1, 2, ..., n$) величина X будет равна своей единице, т. е. $X=[X]$. Отсюда когерентная единица

$$[X]=\prod_{i=1}^{n} [X_i]^{\alpha_i} . \tag{6}$$

Например, если X — площадь прямоугольника $S=ab$, то при $a=b=1$ м единица площади $[S]$ будет равна 1 м^2.

При неединичных характеристических параметрах, т. е. при $\{X_i\}\neq 1$ и $\prod_{i=1}^{n}\{X_i\}^{\alpha_i}\neq 1$, когерентная единица $[X]$ будет меньше величины X, воспроизводимой моделью, в $\prod_{i=1}^{n}\{X_i\}^{\alpha_i}$ раз, т. е.

$$[X]=\frac{X}{\prod_{i=1}^{n}\{X_i\}^{\alpha_i}} . \tag{7}$$

Например, если прямоугольник имеет неединичные стороны $\{a\}\neq 1$ и $\{b\}\neq 1$ и при том $\{a\}\{b\}\neq 1$, то его площадь будет в $\{a\}\{b\}$ раз больше единицы $[S]$, т. е. в этом случае

$$[S]=\frac{ab}{\{a\}\{b\}}$$

Действительно, так как $a/\{a\}=1$ м и $b/\{b\}=1$ м, то $[S]=1$ м^2.

Если взята неголовная модель, в формуле (2) $Z \neq 1$. При единичных характеристических параметрах

$$X = Z\prod_{i=1}^{n}[X_i]^{n_i}. \qquad (8)$$

и числовое значение $\{X\} = \{Z\}$. Однако числовое значение единицы всегда равно единице: $\{[X]\} = 1$, поэтому единица $[X]$ будет в $\{Z\}$ раз меньше величины X, т. е.

$$[X] = \frac{Z\prod_{i=1}^{n}[X_i]^{n_i}}{\{Z\}} \qquad (9)$$

Примером может служить формула для кинетической энергии движущегося тела $E_к = \frac{1}{2}mv^2$. Модель неголовная, так как $Z = {}^1/_2 \neq 1$. Коэффициент Z можно распределить между множителями произведения в (9) различными способами, например, первый вариант:

$$[E_к] = \frac{(1/2[m])[v]^2}{1/2} = 2(1/2[m])[v]^2;$$

второй вариант:

$$[E_к] = \frac{[m](\sqrt{1/2}[v])^2}{1/2} = 2[m](1/\sqrt{2}[v])^2.$$

Если принять $[m] = 1$ кг, $[v] = 1$ м/с, то $[E_к] = 1$ кг$\cdot$(1 м/с)^2 = 1 Дж. В первом варианте кинетической энергией 1 Дж обладает тело массой 0,5 кг, движущееся со скоростью 1 м/с, во втором — тело массой 1 кг, движущееся со скоростью $\frac{1}{\sqrt{2}}$ м/с $\cong$ $\cong$ 0,707 м/с.

Аналогичен подход к образованию некогерентных единиц, а также единиц по уравнениям с размерным коэффициентом Z, хотя этот последний случай практически менее важен в связи с ограниченной точностью, с которой обычно бывает известен размерный коэффициент Z.

Иногда уравнения, используемые для образования производных единиц при построении когерентной системы единиц, отличаются от тех, которые кладут в основу создания эталонов этих единиц. Это объясняется различием целей: при построении системы единиц стремятся определить производные единицы в удобной и наглядной очередности, не заботясь об экспериментальной стороне, в то время как при создании эталонов стремятся достигнуть наивысшей точности воспроизведения единиц. Сопоставление единиц СИ, используемых в определениях производных единиц некоторых электрических и магнитных величин, с единицами, используемыми при их воспроизведении с помощью эталонов, дает следующую картину:

Производная единица	Определяется как	Воспроизводится через
ньютон (Н)	$1\ м \cdot кг \cdot с^{-2}$	кг, м/с^2
джоуль (Дж)	$1\ м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$	В, А, с
ватт (Вт)	$1\ м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$	А^2, Ом
вольт (В)	$1\ Вт \cdot А^{-1}$	А, Ом
ом (Ом)	$1\ В \cdot А^{-1}$	Ф, Гц
фарад (Ф)	$1\ Кл \cdot В^{-1}$	м, ε_0
генри (Г)	$1\ Вб \cdot А^{-1}$	м, μ_0
вебер (Вб)	$1\ Кл \cdot Ом (В \cdot с)$	м, А, μ_0

Единицы, воспроизводимые с помощью эталонов, не отличаются от указанных в колонке 2-й, если только при создании эталонов используется та же форма уравнений связи между величинами, что и при образовании самих единиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дышлевый П. С., Свириденко В. М.** О принципе наблюдаемости и концепции дополнительности. — Методологические проблемы теории измерений. Киев, Наукова думка, 1966.

2. **Широков К. П.** Интерпретация уравнений связи между физическими величинами. — Труды метрологических институтов СССР, М.—Л., Энергия, 1977, вып. 200 (260).

3. **Широков К. П.** Теоретические вопросы образования производных единиц. — Труды метрологических институтов СССР, М.—Л., Энергия, 1977, вып. 200 (260).

Поступила в редакцию
25.7.1977 г.

УДК 389.14

Т. Н. СИРАЯ

ОСНОВНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУППОВЫХ ЭТАЛОНОВ

Групповой эталон представляет собой совокупность однотипных средств измерений, применяемых как единое целое [1]*. Несмотря на то, что групповые эталоны широко применяются в метрологической практике, теоретический анализ применения групповых эталонов и их погрешностей не проводился, за исключением исследования погрешностей группового эталона вольта [2]. Настоящая работа была проведена с целью теоретического анализа погрешностей групповых эталонов, а также общего анализа результатов сличений элементов групповых эталонов между собой и с вторичными эталонами.

Рассмотрим групповой эталон, состоящий из n мер. Отдельная мера, входящая в его состав, называется элементом эталона, а значение воспроизводимой ею физической величины — значением элемента эталона.

Воспроизведение единицы групповым эталоном

При воспроизведении единицы групповым эталоном находят среднее арифметическое значений элементов эталона, полученных в результате абсолютных измерений. Это среднее значение и определяет единицу физической величины, воспроизводимую групповым эталоном. Погрешность воспроизведения единицы равна погрешности определения среднего.

При воспроизведении единицы сначала выполняют для мер абсолютные измерения, а затем — взаимные сличения мер. Абсолютные измерения могут выполняться либо для всех элементов эталона, либо для части элементов эталона (или даже для некоторых других мер, имеющих такие же метрологические свойства). Рассмотрим эти случаи.

---

* См. ГОСТ 8.057-73.

1. Абсолютные измерения выполняются для всех элементов группового эталона. Если в момент этих измерений (принимаемый за начальный момент времени) истинные значения элементов были $X(0)$, $i=1, ..., n$, то при абсолютных измерениях получим значения:

$$X_i = X_i(0) + \Delta X_i, \quad i=1...n, \qquad (1)$$

где $\Delta X_i = \vartheta_i + \varepsilon_i$ — погрешности абсолютных измерений. Пусть систематические составляющие этих погрешностей ϑ_i находятся в границах θ_0, а случайные погрешности ε_i, $i=1 ... n$, независимы и имеют $E[\varepsilon_i]=0$, $D[\varepsilon_i]=\sigma^2$.

Среднее арифметическое полученных значений $\bar{X}_э = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ определяет единицу, воспроизводимую эталоном. Погрешность воспроизведения единицы равна

$$\Delta_0 = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i - \frac{1}{n}\sum_1^n X_i(0) = \frac{1}{n}\sum_1^n \Delta X_i = \bar{\vartheta}(n) + \bar{\varepsilon}(n) \qquad (2)$$

где $\bar{\vartheta}(n) = \frac{1}{n}\sum_1^n \vartheta_i$, $\bar{\varepsilon}(n) = \frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i$. Систематическая погрешность воспроизведения $\bar{\vartheta}(n)$ остается в тех же границах θ_0, что и систематическая погрешность абсолютных измерений. Однако в том случае, когда $\vartheta_1, ..., \vartheta_n$ различны и могут иметь разные знаки, естественно ожидать уменьшения систематической погрешности при усреднении. При некоторых дополнительных предположениях для оценивания границ $\bar{\vartheta}(n)$ можно использовать методику суммирования погрешностей, предложенную в [3]. Дисперсия случайной погрешности воспроизведения $\bar{\varepsilon}(n)$ в n раз меньше дисперсии погрешности абсолютных измерений, т. е. $D[\bar{\varepsilon}(n)] = \frac{1}{n}\sigma^2$.

После нахождения среднего $X_э$ обычно для уточнения значений элементов выполняют их взаимные сличения. Предположим, что сличение двух мер выполняется со случайной погрешностью α, для которой $E[\alpha]=0$, $D[\alpha]=\sigma^2_\alpha$. Считаем, что при сличениях истинные значения оставались прежними: $X_i(0)$, $i=1 ... n$.

Сличения элементов эталона могут быть двух видов:

а) нахождение разностей физических величин, воспроизводимых мерами;

б) нахождение отношений тех же физических величин.

Результаты сличений имеют вид соответственно

$$R_{ik} = [X_i(0) - X_k(0)] + \alpha_{ik} \quad \text{и} \quad r_{ik} = \frac{X_i(0)}{X_k(0)} + \beta_{ik}.$$

где α_{ik} и β_{ik} — погрешности сличений. Далее будем рассматривать сличения первого вида (для второго вида все аналогично).

Уравнения для нахождения уточненных значений элементов имеют вид

$$X_i = X_i(0) + \Delta X_i, \quad i = 1 \dots n, \tag{3}$$

$$R_{jk} = [X_j(0) - X_k(0)] + \alpha_{jk}, \quad j \neq k, \ j, k = 1 \dots n. \tag{4}$$

При решении этой системы следует применять метод наименьших квадратов для случая неравноточных измерений [4], т. е. вводить веса, соответствующие погрешностям ΔX_i и α_{jk}. Однако в большинстве случаев погрешности сличений α_{jk} малы по сравнению с погрешностями абсолютных измерений, и (4) можно рассматривать как уравнения связи для системы (3). Тогда получаем уточненные значения элементов: $\tilde{X}_i = \frac{1}{n}\sum_1^n X_k + \frac{1}{n}\sum_1^n R_{ik}$, $i = 1, \dots, n$ (для простоты записи полагаем $R_{ii} = \alpha_i' = 0$). Погрешности этих значений составят

$$\Delta\tilde{X}_i = \tilde{X}_i - X_i(0) = \frac{1}{n}\sum_1^n \Delta X_k + \frac{1}{n}\sum_1^n \alpha_{ik} = \bar{\vartheta}(n) + \bar{\varepsilon}(n) + \bar{\alpha}_i.$$

Поскольку слагаемые $\bar{\alpha}_i$ малы, погрешности $\Delta\tilde{X}_i$ примерно одинаковы и равны погрешности воспроизведения единицы $\Delta_0 = \bar{\vartheta}(n) + \bar{\varepsilon}(n)$.

2. Абсолютные измерения выполняются для l мер, не входящих в состав группового эталона; затем с этими мерами сличаются все элементы группового эталона (например, при воспроизведении единицы э.д.с. измерения на токовых весах выполняют для четырех нормальных элементов, не входящих в состав группового эталона вольта). Если y_{j0}, $j = 1, \dots, l$ — истинные значения указанных мер, то в результате абсолютных измерений получают значения: $y_j = y_{j0} + \Delta y_j$, $j = 1, \dots, l$, где $\Delta y_j = \vartheta_j + \varepsilon_j$ — погрешности абсолютных измерений (как и раньше, $|\vartheta_j| \leq \theta_0$, $E[\varepsilon_j] = 0$, $D[\varepsilon_j] = \sigma^2$).

Предположим, что при сличениях с элементами группового эталона истинные значения мер y_j, оставались неизменными, тогда при сличении i-го элемента эталона с j-й мерой получают ($i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots l$): $R_{ij} = [X_i(0) - y_{j0}] + \alpha_{ij}$. В результате сличений для элементов эталона получают значения

$$X_i = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}[y_j + R_{ij}]$$

Погрешность определения среднего значения $X_э = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$

равна

$$\Delta_0 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}[X_i - X_i(0)] = \bar{\vartheta}(l) + \bar{\varepsilon}(l) + \bar{\alpha}\,. \qquad (5)$$

где $\bar{\vartheta}(l) = \frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta_j,\ \bar{\varepsilon}(l) = \frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\varepsilon_j,\ \bar{\alpha} = \frac{1}{nl}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\alpha_{ij}.$

Ввиду малости $\bar{\alpha}$ погрешность воспроизведения единицы $\Delta_0 \approx \approx \bar{\vartheta}(l) + \bar{\varepsilon}(l)$. Аналогично первому случаю, систематическая составляющая $\bar{\vartheta}(l)$ оценивается теми же границами θ_0, а дисперсия случайной составляющей $D[\bar{\varepsilon}(l)] = \frac{1}{l}\sigma^2$.

Кроме отмеченных, возможен случай, когда абсолютные измерения выполняются для части ($l < n$), элементов группового эталона. Погрешность воспроизведения единицы при этом также $\Delta_0 = \bar{\vartheta}(l) + \bar{\varepsilon}(l)$.

Изменение во времени элементов группового эталона

Прежде чем перейти к хранению единицы групповым эталоном, рассмотрим изменение во времени истинных значений элементов эталона.

Обычно, изучая изменение во времени метрологической характеристики средства измерений, выделяют две составляющие. Одна из них обусловлена медленно протекающими необратимыми физическими или химическими изменениями в средствах измерений и представляет собой систематическое изменение метрологической характеристики (так называемое вековое уравнение). Эта составляющая может быть вызвана, например, износом механизмов, старением материалов и другими причинами, ее принято описывать либо неслучайной функцией времени, либо функцией, зависящей от нескольких случайных параметров. Вторая составляющая обусловлена кратковременными обратимыми физическими изменениями в средствах измерений и представляет собой флуктуационные изменения метрологической характеристики. Она может быть обусловлена, например, колебаниями внешних условий, рабочих нагрузок и т. п. Ее принято описывать стационарным случайным процессом со слабой корреляцией.

Далее считаем, что истинные значения элементов группового эталона изменяются во времени следующим образом [2]:

$$X_i(t) = a_i + \xi_i(t) + \nu_i(t), \qquad (6)$$

где a_i — некоторое начальное значение, от которого отсчитывают изменения $\xi_i(t)$ и $\nu_i(t)$; $\xi_i(t)$ — флуктуационное изменение элемента; $\nu_i(t)$ — систематическое изменение.

Для элемента группового эталона функция $\nu_i(t)$ должна на рассматриваемом промежутке хорошо приближаться линейной или квадратичной функцией. В начальный момент времени $\nu_i(0) = 0$.

Флуктационные изменения $\xi_i(t)$, $i = 1 \ldots n$ описываются взаимно независимыми стационарными процессами с одинаковыми распределениями и слабой корреляцией. Случайная величина $\xi_i(t)$ имеет $E[\xi_i(t)] = 0$ и $D[\xi_i(t)] = \sigma^2_{\xi}$; для различных элементов $i \neq j$ случайные величины $\xi_i(t_1)$ и $\xi_j(t_2)$ независимы при всех t_1 и t_2; для одного элемента — $\xi_i(t_1)$ и $\xi_i(t_2)$ независимы, если $|t_1 - t_2| > \tau$. Далее предполагаем, что одна процедура сличений занимает небольшое время (в течение которого значения элементов неизменны), а последующие сличения отстоят на время не менее τ.

Хранение единицы групповым эталоном

В период между абсолютными измерениями основанием хранения единицы групповым эталоном является условие постоянства среднего арифметического значения элементов эталона, т. е. истинное среднее значение элементов эталона

$\overline{X}(t) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i(t)$ считают примерно постоянным и равным

среднему $X_э$, полученному при воспроизведении единицы. Однако в действительности $\overline{X}(t)$ не равно $X_э$, и эталону соответствует погрешность $\Delta_t = X_э - \overline{X}(t)$. Отличие $\overline{X}(t)$ от $X_э$ обусловлено двумя причинами. Во-первых, при воспроизведении единицы было получено значение $X_э$, отличное от истинного среднего $\overline{X}(0)$. Во-вторых, ввиду нестабильности элементов эталона $\overline{X}(t)$ отличается от $\overline{X}(0)$. Таким образом, $\Delta_t = [X_э - \overline{X}(0)] + [\overline{X}(0) - \overline{X}(t)]$; групповой эталон осуществляет хранение единицы, которая установлена с погрешностью $\Delta_0 = X_э - \overline{X}(0)$ и может меняться в период хранения из-за нестабильности элементов.

Поскольку истинные значения элементов эталона изменяются согласно (6), их среднее имеет вид $\overline{X}(t) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_i + \overline{\xi}(t) + \nu(t)$.

где $\bar{\xi}(t)=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\xi_i(t)$, $\bar{\nu}(t)=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\nu_i(t)$. Флуктационная составляющая среднего $\bar{\xi}(t)$ существенно меньше, чем отдельные составляющие $\xi_i(t)$, т. е. $D[\bar{\xi}(t)]=\frac{1}{n}\sigma_{\xi}^2$. В связи с этим одно из основных требований, предъявляемых к групповому эталону, состоит в том, что систематическое изменение среднего $\bar{\nu}(t)$ должно быть мало. Обычно групповой эталон составляют из элементов, для которых все систематические изменения $\nu_i(t)$ малы (за промежуток времени между исследованиями эталона, проводимыми путем абсолютных измерений).

Далее предполагаем, что систематические изменения $\nu_i(t)$ малы, т. е. истинные значения элементов $X_i(t)\approx a_i+\xi_i(t)$; тогда среднее имеет вид $\bar{X}(t)=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}a_i+\bar{\xi}(t)$, а погрешность эталона равна $\Delta_t=\Delta_0+\bar{\xi}(0)-\bar{\xi}(t)$. Систематическая составляющая этой погрешности $\Delta_0+\bar{\xi}(0)$ обусловлена погрешностью воспроизведения единицы Δ_0 и зафиксированным значением $\bar{\xi}(0)$; случайная составляющая $-\bar{\xi}(t)$ обусловлена флуктуационными изменениями элементов эталона. Далее все значения элементов будем выражать в установленной при воспроизведении национальной единице, тогда погрешность эталона в период хранения единицы равна $-\bar{\xi}(t)$.

Внутригрупповые сличения элементов эталона

В период хранения единицы групповым эталоном периодически выполняют внутригрупповые сличения его элементов. Сличения дают возможность определять значения элементов (на основании условия постоянства среднего), а также обнаруживать и исключать элементы с недопустимо высокой нестабильностью.

Пусть внутригрупповые сличения выполняют в момент времени $t>\tau$ (отсчет времени ведется от момента очередного воспроизведения единицы). При сличениях выбирают из элементов эталона $m\leqslant n$ опорных элементов (пусть их номера $k=1 \dots m$) и с ними сличают все элементы эталона. При сличении i-го элемента эталона с k-м опорным получают результат $R_{ik}=X_i(t)-X_k(t)+\alpha_{ik}$, где α_{ik} — погрешность сличений. На основании сличений всех элементов с k-м опорным элементом получают среднее значение

$$X_{\text{ср}}^{k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{X}_k(0)+R_{ik}\right]=\tilde{X}_k(0)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_{ik},$$

где $X_k(0)$ — ранее полученное (при воспроизведении единицы) значение опорного элемента, и для простоты записи $R_{kk}=\alpha_{kk}=0$. Учитывая условие постоянства среднего значения, во все полученные значения элементов вносят поправку $c_k=X_k-X^k{}_{ср}$. В результате сличений со всеми опорными элементами для i-го элемента получают значение $\tilde{X}_i(t)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left[\tilde{X}_k(0)+R_{ik}+c_k\right]$, которое имеет погрешность

$$\Delta X_i(t)=\tilde{X}_i(t)-X_i(t)\approx-\bar{\xi}(t)+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha_{ik}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}\right]$$

Эта случайная погрешность обусловлена нестабильностью среднего $\bar{\xi}(t)$ и погрешностями сличений; ее дисперсия равна

$$D[\Delta X_i(t)]\approx\frac{1}{n}\sigma_\xi^2+\frac{1}{m}\sigma_\alpha^2, \qquad (7)$$

и уменьшается с ростом числа элементов эталона n и числа опорных элементов m. Если число n невелико, то можно принять $m=n$, т. е. выполнять сличения по полной схеме, когда каждый элемент сличается со всеми остальными. Однако часто это нецелесообразно, так как процедура сличений становится очень трудоемкой, не давая заметного повышения точности.

По результатам сличений можно обнаружить элементы со значительной нестабильностью. Пусть в результате двух сличений (во время t_1 и t_2, $|t_1-t_2|>\tau$) получены значения элементов эталона $\tilde{X}_i(t_1)$ и $\tilde{X}_i(t_2)$, $i=1 \ldots n$ (если $t_1=0$, то $\tilde{X}_i(0)$ — значения, полученные при воспроизведении единицы). Пренебрегая погрешностями сличений, получим

$\tilde{X}_i(t_1)-\tilde{X}_i(t_2)\approx\xi_i(t_1)+\nu_i(t_1)-\xi_i(t_2)-\nu_i(t_2)$. Если для элементов группового эталона систематические изменения $\nu_i(t)$ малы, то $\tilde{X}_i(t_1)-\tilde{X}_i(t_2)\approx\xi_i(t_1)-\xi_i(t_2)=\eta_i$, где η_i — независимые одинаково распределенные случайные величины. Таким образом, исключение нестабильного элемента сводится к исключению резко выделяющегося члена из выборки $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

Известен критерий исключения резко выделяющегося члена из выборки $\eta_1, \ldots, \eta_n$, основанный на нормированном отклонении $t_n=\max|\eta_i-\bar{\eta}|/S(\eta)$,

где $\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\eta_i$, $S^2(\eta)=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(\eta_i-\bar{\eta})^2$ (применение этого кри-

терия описано в [5]). Приближенный критерий обнаружения нестабильных элементов основан на этом критерии для разностей $\tilde{X}_i\ (t_1) - \tilde{X}_i\ (t_2)$.
Пусть $q (0<q<1)$ — выбранный уровень значимости и $t_n\ (q)$ — квантиль порядка $1-q$ статистики t_n, тогда критерий исключения элементов имеет вид

$$\left|\tilde{X}_i(t_1)-\tilde{X}_i(t_2)\right| \geqslant t_n(q)\cdot\tilde{S}, \tag{8}$$

где $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n[\tilde{X}_i(t_1)-\tilde{X}_i(t_2)]^2$. Выполнение условия (8) означает, что для i-го элемента эталона наблюдается либо значительное увеличение дисперсии флуктуационных изменений $\xi_i\ (t)$, либо недопустимое систематическое изменение $\nu_i\ (t_2) - \nu_i\ (t_1)$.

Например, если случайные величины $\xi_i\ (t)$ имеют нормальное распределение, то при $q=0{,}05$, $n=20$ получим критерий

$$\left|\tilde{X}_i(t_1)-\tilde{X}_i(t_2)\right| \geqslant 2{,}7\tilde{S}. \tag{9}$$

Анализ результатов внутригрупповых сличений эталона вольта, проведенных в 1974—1975 гг., показал, что для нормальных элементов распределение $\xi_i\ (t)$, по-видимому, отличается от нормального. Однако характер отклонения этого распределения от нормального позволяет считать, что в этом случае применим приближенный критерий (9), основанный на предположении о нормальности распределения, так как он строже, чем более точный критерий вида (8).

Выше предполагалось, что параметры σ^2_ξ и σ^2_α, характеризующие нестабильность элементов эталона и погрешность сличений, известны (получены ранее при изучении элементов эталона). Однако не всегда имеются такие данные или уверенность в том, что эти параметры не изменились. По результатам сличений можно также оценить σ^2_α и σ^2_ξ или проверить, что они не изменились значительно.

Дисперсию погрешности сличений σ^2_α можно оценить по результатам одной процедуры сличений. Если при сличении элементов с k-м опорным элементом были получены значения $X_i^{(k)}$, $i=1\ldots n$, и $\tilde{X}_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m X_i^{(k)}$, то выражение

$$S_\alpha^2 = \frac{1}{(m-1)(n-1)}\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n[X_i^{(k)}-\tilde{X}_i]^2 \tag{10}$$

является несмещенной оценкой параметра σ^2_α.

Параметр σ^2_ξ, характеризующий нестабильность элементов, можно оценить, сравнивая результаты двух процедур сличений. Если при сличениях в моменты времени t_1 и t_2, где $|t_1 - t_2| > \tau$, были получены значения элементов $\tilde{X}_i(t_1)$ и $\tilde{X}_i(t_2)$, то в качестве оценки σ^2_ξ можно принять

$$S^2_\xi = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n} [\tilde{X}_i(t_1) - \tilde{X}_i(t_2)]^2 \qquad (11)$$

Заметим, что $E[S^2_\xi] = \sigma^2_\xi + \frac{1}{m}\sigma^2_\alpha > \sigma^2_\xi$, т.е часто получаем несколько завышенное значение параметра σ^2_ξ.

Передача размера единицы

Хранение единицы групповым эталоном осуществляется на основании среднего значения элементов эталона, поэтому передача размера единицы производится путем сличения вторичного эталона с элементами группового эталона.

Если вторичный эталон (с истинным значением X_0) непосредственно сличают со всеми элементами группового эталона, то для него получают значение $\tilde{X}_0 = X_0 + \frac{1}{n}\sum_1^n R_i$, где результаты сличений $R_i = X_0 - X_i(t) + \alpha_i$. Полученное значение $\tilde{X}_0$ имеет погрешность ΔX_0 с дисперсией $\frac{1}{n}(\sigma^2_\xi + \sigma^2_\alpha)$.

Если несколько вторичных эталонов имеют такие же метрологические характеристики, как и элементы группового эталона, то передачу размера единицы обычно выполняют так же, как и внутригрупповые сличения (например, для эталонов вольта). Из n элементов первичного эталона и p вторичных эталонов составляют группу и выполняют в ней сличения, как описано выше. Отличие состоит в том, что при обработке результатов наблюдений используют условие постоянства среднего для первичного эталона (а не для всей группы). При этом погрешности полученного значения вторичного эталона (т. е. погрешность передачи размера единицы) имеет дисперсию примерно $\frac{1}{n}\sigma^2_\xi + \frac{1}{m}\sigma^2_\alpha$, где m — число опорных элементов, входящих в групповой эталон.

В результате можно сделать следующие выводы:

погрешность воспроизведения единицы физической величины групповым эталоном определяется формулой (2) или (5);

в период хранения единицы групповым эталоном его элементы должны иметь пренебрежимо малые систематические изменения $v_i(t)$; в этом случае погрешность определения значений отдельных элементов имеет дисперсию, задаваемую (7), и обусловлена флуктуационными изменениями среднего $\bar{\xi}(t)$ и погрешностями сличений;

для исключения из состава группового эталона нестабильных элементов следует использовать критерий (8); во многих случаях применим приближенный критерий (9);

для оценки параметров σ^2_ξ и σ^2_a, характеризующих нестабильность элементов эталона и погрешность их сличений, следует использовать формулы (10) и (11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исаев Б. М., Широков К. П.** Новый государственный стандарт «Эталоны и образцовые средства измерений». — Измерительная техника, 1971, № 7.

2. **Долинский Е. Ф.** Оценка погрешности группового эталона э.д.с. — Труды метрологических институтов СССР, М., Изд-во стандартов, 1960, вып. 39(99).

3. **Рабинович С. Г.** Методика вычисления погрешности результата измерения. — Метрология, 1970, № 1.

4. **Долинский Е. Ф.** Обработка результатов измерений. М., Изд-во стандартов, 1973.

5. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г., Резник К. А.** Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. — Труды метрологических институтов СССР, М.—Л., Изд-во стандартов, 1972, вып. 134 (194).

Поступила в редакцию
24.8.1977 г.

УДК 53.08

С. Г. РАБИНОВИЧ

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Материальной основой обеспечения точности бесчисленных измерений, выполняемых в народном хозяйстве, служат эталоны и образцовые средства измерений. Однако погрешности измерений, как известно, приходится оценивать расчетным путем, на основе теории. Поэтому разработка методов оценивания погрешностей измерений является одной из важных задач метрологического обеспечения народного хозяйства.

Настоящая статья представляет собой обзор практических методов оценивания погрешностей измерений.

В целом задача оценивания погрешностей измерений решается на основе оценок составляющих, путем их суммирования. Составляющие погрешности измерений чрезвычайно разнообразны по своей природе, но их можно свести к погрешностям методическим, инструментальным и личным.

Методические погрешности, как правило, являются погрешностями систематическими. В развитых областях измерений, в изученных случаях, эти погрешности практически отсутствуют или известны способы их устранения с необходимой точностью.

Личные погрешности благодаря развитию средств измерений в настоящее время обычно не имеют существенного значения.

Инструментальные погрешности измерений всегда неизбежны и часто определяют точность измерений. Их оценивание осуществляется по-разному, в зависимости от точности измерений. Поэтому применительно к рассматриваемой задаче введем следующую классификацию измерений.

Измерения с точным оцениванием погрешностей — когда учитываются индивидуальные свойства средств измерений и контролируются условия измерений;

Измерения с приближенным оцениванием погрешностей — когда учитываются нормативные данные о свойствах средств измерений и приближенно оцениваются условия измерений;

Измерения с предварительным оцениванием погрешностей — когда регламентируются марки (типы) применяемых средств измерений, условия выполнения измерений и заранее оценены погрешности.

Рассмотрим последовательно все три категории измерений. Для простоты ограничимся прямыми измерениями.

Измерения с точным оцениванием погрешностей часто выполняются с многократными наблюдениями. За результат измерения обычно принимают среднее арифметическое результатов наблюдений, в которые вносят соответствующие поправки. Методика оценивания погрешности результата измерения для этого случая разработана наиболее подробно [1—6].

Случайную составляющую погрешности результата измерения характеризуют средним квадратическим отклононием $S_{\bar{x}}$, которое находят по полученным в ходе эксперимента данным. Вычисления выполняют по формуле

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \qquad (1)$$

где x_i — результат i-го наблюдения (с учетом соответствующих поправок) ($i = 1 \ldots n$); $\bar{x}$ — среднее арифметическое.

Важнейшей характеристикой рассеивания самих наблюдений является их среднее квадратическое отклонение S:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (2)$$

Если, кроме параметров случайной погрешности, требуется оценить возможные ее границы, то задача, как правило, решается в предположении, что мыслимое множество наблюдений имеет нормальное распределение. Тогда доверительные границы случайной погрешности вычисляют по формуле

$$\varepsilon = t S_{\bar{x}}, \qquad (3)$$

где t — коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности α и количества наблюдений n.

Систематическая составляющая погрешности результата измерения в общем случае имеет две составляющие. Одна из них — безусловно постоянная. Такой погрешностью обычно является методическая погрешность. Вторая составляющая — условно постоянная. Такая составляющая может вызываться, например, систематической погрешностью занятых в эксперименте средств измерений, если эта погрешность разная у разных экземпляров средств измерения одного и того же типа. Такую погрешность образуют также неисключенные остатки большинства учитываемых с помощью поправок систематических погрешностей.

Систематическая погрешность результата измерения

$$\theta = \sum_{p=1}^{r} \theta_{бp} + \sum_{j=1}^{m} \theta_{yj},$$

где $\theta_{бp}$— p-я безусловно постоянная составляющая систематической погрешности ($p=1$ ... r), θ_{yj} — j-я условно постоянная составляющая систематической погрешности ($j=1$ ...m).

Для каждой составляющей обычно оценивают верхнюю $\theta_в$ и нижнюю $\theta_н$ границы, причем часто $|\theta_{вy}| = |\theta_{нy}| = \theta_т$ и $\theta_{нб}=0$. Отсюда $\theta \leqslant \theta_{бp} \leqslant \theta_{вр}$ и $|\theta_{yj}| \leqslant \theta_{yj}$. По этим данным требуется оценить границы погрешности θ.

Условно постоянные составляющие давно рассматриваются как случайные величины [1]. В настоящее время для них уже общепринята модель с равномерным распределением [4—6]*. Опираясь на это предложение получена удобная расчетная формула [4]

$$\theta_y = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \theta_{yj}^2}\,. \qquad (4)$$

Коэффициент k в основном определяется доверительной вероятностью α и при $\alpha=0{,}95$ равен 1,1; при $\alpha=0{,}99$ он равен 1,4. При этом погрешность не превышает 10%. Однако, если $j \leqslant 3$ и θ_j резко различны, то при $\alpha=0{,}99$ расчеты с $k=1{,}4$ дают преувеличение погрешности до 30%. В этих случаях для нахождения k целесообразно пользоваться графиком, приведенным в ГОСТ 8.207-76*, или аппроксимирующей формулой

$$k = 1{,}45 - 0{,}05\frac{\theta_1}{\theta_2}\,.$$

Если $m=3$, то за θ_1 и θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$) следует принимать наибольшую и ближайшую к ней составляющие.

Границу безусловно постоянной составляющей нельзя оценить иначе, как алгебраическим суммированием составляющих, т. е. $\theta_б = \sum_{p=1}^{r} \theta_{бp}$.

Таким образом, находим оценки для границ систематической составляющей погрешности результата измерения

$$\theta_в = \theta_{вб} + \theta_y\,, \quad \theta_н = \theta_{нб} - \theta_y \qquad (5)$$

В ряде случаев полученных оценок составляющих погрешности измерения достаточно. Однако, когда результат измере-

* ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений».

ния дает окончательную информацию об объекте, требуется оценить суммарную погрешность результата. Решить эту задачу можно следующим образом [4, 5]. Соединим случайную и условно постоянные составляющие погрешности. Оценка их суммарной дисперсии, имея в виду, что

$$S_y^2 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m}\theta_{yj}^2 , \tag{6}$$

равна

$$S_\Sigma^2 = S_x^2 + S_y^2 . \tag{7}$$

Отсюда $\Delta = KS$, причем

$$K = \frac{\varepsilon + \theta_y}{S_x + S_y} . \tag{8}$$

Для вычисления ε и θ_y должна быть принята одна и та же доверительная вероятность. Теперь можно найти границы суммарной погрешности

$$\Delta_в = \theta_{вб} + \Delta , \quad \Delta_н = \theta_{нб} - \Delta$$

В рассмотренном случае измерение выполнялось с многократными наблюдениями с целью уменьшения случайной составляющей погрешности результата. Однако, если заранее известно, что случайные погрешности малы, измерение выполняют без повторных наблюдений. Как и в предыдущем случае, по данным о свойствах средств измерений и влияющих величинах в результат измерения вносят соответствующие поправки. Неисключавшиеся ввиду малости погрешности и неисключенные остатки других составляющих погрешности создают погрешность результата. Одни из них могут быть по существу систематическими погрешностями данного измерения, другие — случайными.

Поскольку измерение выполнялось без повторных наблюдений, нет необходимости учитывать эти погрешности по отдельности, а модуль доверительной погрешности результата измерения можно оценить по приближенной формуле

$$\Delta = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\theta_{yj}^2 + \sum_{q=1}^{u}\varepsilon_q^2} . \tag{9}$$

где ε_q — доверительная граница q-й случайной составляющей погрешности ($q = 1 \ldots u$).

Одной из составляющих случайной погрешности, при применении аналоговых приборов, является погрешность отсчитывания показаний (личная погрешность).

При других исходных данных расчетная формула может быть иной. Например, если для случайных погрешностей известны средние квадратические отклонения σ_q и $m+n \geqslant 5$ [6], то целесообразна формула

$$\Delta = z\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m}\theta_{sj}^{2} + \sum_{q=1}^{n}\sigma_q^{2}}\ ,$$

где z — коэффициент, определяемый по нормированному нормальному распределению; так, при $\alpha = 0{,}95$ имеем $z \approx 2$.

При точных измерениях обычно контролируют ход эксперимента и для этого выполняют не одно, а два—три наблюдения. Если случайная составляющая погрешности измерения действительно мала, то и разность между любыми из полученных результатов будет малой — обычно считают, что она должна быть меньше допустимой погрешности, определяемой целью измерения.

Поскольку наблюдения уже сделаны, за результат измерения принимают их среднее. Погрешность результата определяется, например, соотношением

$$\Delta = z\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{m}\theta_{sj}^{2} + \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n}\sigma_q^{2}}$$

Найдем допустимое соотношение между случайной и систематической составляющими погрешности. Очевидно, что различие между наблюдениями определяется только случайной составляющей, которая, как принято считать, имеет нормальное распределение. Поэтому можно воспользоваться известной функцией распределения размаха $R(\alpha, n)$ [7]. Для $\alpha = 0{,}95$ и $n = 3$ имеем $R(0{,}95; 3) \leqslant 3{,}3\,\sigma$.

С другой стороны, размах должен быть меньше погрешности результата (в общем случае — меньше величины, пропорциональной этой погрешности), т. е. $3{,}3\,\sigma \leqslant \Delta$. Так как $\sigma = \sqrt{\sum_{q=1}^{n}\sigma_q^{2}}$, то из приведенных соотношений с учетом $z = 2$ ($\alpha = 0{,}95$) и $n = 3$ нетрудно получить

$$\sqrt{\sum_{q=1}^{n}\sigma_q^{2}\Big/\sum_{j=1}^{m}\theta_{sj}^{2}} \leqslant 0{,}4.$$

При измерениях с приближенным оцениванием погрешности чаще всего ограничиваются однократными наблюдениями. Методические погрешности считаются устраненными (или устранимыми) с достаточной точностью, а личные погрешности пренебрежимо малыми. Основная задача состоит в том, чтобы оценить инструментальную погрешность измерения, практически совпадающую с погрешностью измерения. Для оценивания инструментальной погрешности измерения специфична задача суммирования дополнительных погрешностей. Общую схему решения этой задачи можно представить следующим образом. Фиксируется имеющаяся информация о каждой из влияющих величин. Если возможно, составляются оценки функций распределения этих величин, например, в виде гистограмм с несколькими интервалами. Затем, пользуясь нормативными данными о свойствах средств измерений, переходят к гистограммам соответствующих дополнительных погрешностей. Далее строится композиция соответствующих распределений. Поправки находят только для тех величин, значения которых при измерении известны и по отношению к которым для средств измерений нормируют функции влияния.

Часто известны лишь границы возможных дополнительных погрешностей; распределения их обычно считают равномерными. Существенно, что часто $|\theta_{нj}| \neq |\theta_{вj}|$.

Такие составляющие представим как симметричные относительно некоторого центра $a_j = \frac{\theta_{вj} + \theta_{нj}}{2}$.

Систематическую погрешность в данном эксперименте применительно к мыслимому множеству подобных измерений опять рассматриваем как случайную величину ϑ_j ($\theta_{нj} \leqslant \vartheta_j \leqslant \theta_{вj}$). Теперь $\vartheta_j = a_j + \eta_j$. Границы центрированной случайной величины по модулю равны $H_j = \frac{\theta_{вj} - \theta_{нj}}{2}$

Суммируя все погрешности, получим

$$\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j = \vartheta_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j + \sum_{j=1}^{m} \eta_j ,$$

где ϑ_0 — основная погрешность прибора ($|\vartheta| \leqslant \Delta_0$); в принцип: их может быть несколько.

Второй член правой части выражения находится алгебраическим суммированием. Для остальных нужно найти оценку границ их суммы по формуле, аналогичной (4)

$$H = k\sqrt{\Delta_0^2 + \sum_{j=1}^{m} H_j^2}$$

Теперь можно определить доверительные границы $\Delta_н$ и $\Delta_в$ погрешности результата измерения

$$\Delta_{в,н} = \sum_{j=1}^{m} a_j \pm H , \qquad (10)$$

В данном случае $\sum_{j=1}^{m} a_j$ не устраняют из результата измерения, так как эта сумма оценена с недостаточной надежностью.

Иногда измерения с приближенным оцениванием погрешностей выполняются с многократными наблюдениями. Обычно при этом измеряется средняя по определению величина. Оценка $S_{\bar{x}}$, составляемая по формуле (1), в этом случае часто характеризует свойства объекта исследования, а не случайную погрешность результата. Погрешность собственно измерения определяется по-прежнему формулой (10).

Измерения с предварительным оцениванием погрешностей дают более грубый результат, однако они наиболее удобны для часто повторяющихся измерений, и поэтому очень распространены. Они широко применяются на производстве, в торговле и т. п. По этому признаку их можно назвать техническими измерениями.

При выполнении технических измерений, как уже отмечалось, погрешности не оценивают; они должны быть оценены заранее. В связи с этим при расчете погрешностей нужно учитывать все влияющие величины, хотя очевидно, что в ряде случаев часть из них не будет выходить за пределы границ области нормальных значений. Кроме того, нужно предусмотреть измерения в некотором диапазоне. Обычно расчет приходится выполнять для наименее благоприятной точки диапазона. Методика же вычисления границ погрешности остается той же, что и для измерений с приближенным оцениванием погрешностей.

Помимо трех выделенных и явно различных по точности оценивания погрешностей измерений встречаются случаи, когда для достижения требуемой точности нельзя ограничиться только нормативными данными, а приходится находить оценки некоторых из свойств тех средств измерений, которые использовались в эксперименте. Согласно приведенной классификации такие измерения нужно считать комбинированными. Погрешности их можно оценить, комбинируя рассмотренные выше методы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии. М., Стандартгиз, 1949.

2. **Бурдун Г. М., Марков Б. Н.** Основы метрологии. 2-е изд. М., Изд-во стандартов, 1975.

3. **Долинский Е. Ф.** Обработка результатов измерений. М., Изд-во стандартов, 1973.

4. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений. Л., Энергия, 1978.

5. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г., Резник К. А.** Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. — В кн. Труды метрологических институтов СССР, М., Изд-во стандартов, 1972, вып. 134 (194).

6. **Кудряшова Ж. Ф.** Разработка и обоснование методов статистической обработки результатов наблюдений при прямых и косвенных измерениях высокой точности. Автореф. канд. дисс. Л., ВНИИМ, 1976.

7. **Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.** Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., Наука, 1965.

Поступила в редакцию
25.7.1977 г.

УДК 389

К. П. ШИРОКОВ, С. Г. РАБИНОВИЧ

РАБОТЫ ВНИИМ ПО ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕТРОЛОГИИ

Наряду с теоретическими исследованиями, связанными с совершенствованием эталонов, образцовых средств и методов точных измерений, во ВНИИМ ведутся работы по обобщению накопленного опыта и исследованию теоретических проблем общеметрологического характера — работы по проблемам теоретической метрологии.

До недавнего времени эти работы велись, как правило, в порядке личной инициативы отдельных метрологов. Однако в связи с возрастанием роли метрологии в развитии народного хозяйства и соответственно с возрастанием роли теории разработке ее проблем стали уделять больше внимания. В данной статье кратко изложены результаты работ ВНИИМ в этой области, причем более подробно освещены работы последнего времени, входящие в круг научных интересов авторов статьи.

К работам общеметрологического характера относится монография проф. М. Ф. Маликова [1], являвшаяся долгое время основным пособием для подготовки кадров метрологов. Большой интерес представляет книга проф. П. М. Тиходеева [2].

Одной из основных задач института всегда являлась разработка стандартов на единицы физических величин, а также на термины в области метрологии. Вскоре после основания Главной палаты мер и весов Д. И. Менделеевым было разработано Положение о мерах и весах, утвержденное в 1899 г. Переход в нашей стране на международную метрическую систему мер, провозглашенный декретом СНК РСФСР от 11 сентября 1918 г., также был подготовлен Главной палатой мер и весов, и в дальнейшем все стандарты СССР на единицы физических величин разрабатывались ВНИИМ [3]. Проект нового государственного стандарта «Единицы физических величин» также разработан институтом и с 1969 г. уже применяется в учебном процессе, в научно-технической литературе и в ряде областей практики. Институт является автором и международных документов по единицам, в частности, рекомендации СЭВ по стандартизации РС 3472-74 «Порядок и общие методы перехода в странах—членах СЭВ на Международную систему единиц», типовой программы мероприятий по осуществлению перехода в странах—членах СЭВ на единицы СИ [4] и проекта стандарта СЭВ «Единицы физических величин». Сотрудниками института опубликован ряд брошюр и статей информационного характера о Международной системе единиц и ее внедрении в СССР.

В теоретическом плане подготовка стандартов сопровождалась исследованием вопросов построения систем единиц. Современные системы единиц строятся на основе связей между физическими величинами и выражающих эти связи уравнений. В литературе о них высказывались противоречивые мнения, поэтому в институте были проведены работы по анализу представлений, относящихся, в частности, к понятиям «физическая величина» и «размерность», к системам физических величин, к толкованию физических уравнений как описаний связей между самими величинами (а не только между их числовыми значениями), к видам коэффициентов в уравнениях, к интерпретации рационализации уравнений и др. [5—9]*.

Институтом подготовлено также большое число терминологических стандартов [3], среди которых следует выделить стандарты на метрологическую терминологию, разработанные проф. М. Ф. Маликовым (ОСТ/ВКС 7636, 1935 и ГОСТ 3951-47). С целью модернизации этих стандартов была подготовлена рекомендация ВНИИМ [10] и новый стандарт — ГОСТ 16263-70 [11]. Поскольку измерение является актом количественного познания объективной реальности, был проведен анализ основных понятий метрологии с позиций материалистической диалектики, и его результаты [12] были положены в основу этого стандарта. Он является базовым для стандартов по терминологии в отдельных областях измерений, ряд таких стандартов уже создан и их количество все время возрастает. Своими работами в области терминологии институт внес существенный вклад в создание международного словаря законодательной метрологии и методических указаний СЭВ МС 14-71 «Метрология. Термины и определения» [13].

Большое внимание уделялось организации эталонной базы страны и упорядочению системы передачи размеров единиц рабочим средствам измерений. Нормативные документы по этим вопросам также создавались в институте, к ним относятся разработанные проф. М. Ф. Маликовым ГОСТ 1453-42 «Образцовые меры и образцовые измерительные приборы» и «Положение об эталонах и разрядных образцовых мерах» (утверждено в 1954 г.), на основе которых позднее был разработан дейст-

---

* См. стр. 9.

вующий ГОСТ 8.057-73 «Порядок утверждения, хранения и применения эталонов и образцовых средств измерений» [14], определяющий вместе с другим стандартом, устанавливающим правила составления поверочных схем (ГОСТ 8.061-73), всю организацию эталонной базы страны и системы соподчинения эталонов и образцовых средств измерений [15].

Анализ опыта применения упомянутых выше стандартов показал необходимость теоретической проработки ряда вопросов. Были рассмотрены критерии необходимости создания эталонов, в том числе — групповых. Выполнено теоретическое исследование основных метрологических характеристик групповых эталонов * и даны рекомендации по выбору числа элементов группового эталона. Рассмотрена теория радиальных и круговых сличений эталонов, выполняемых с целью оценивания расхождений между национальными единицами. Краткая информация об этих исследованиях содержится в работах [16, 17].

На основе указанных выше работ институтом был разработан первый стандарт СЭВ в области метрологии «Метрология. Погрешности эталонов. Способы выражения» (СТ СЭВ 403-76). Он был разработан Б. Ф. Лосевым и М. Н. Селивановым под руководством К. П. Широкова.

Развита теория поверочных схем. Разработан метод расчета числа разрядов образцовых средств измерений на основе учета необходимого количества поверок и «производительности» образцовых средств измерений. Оценено также максимально возможное количество разрядов при имеющемся соотношении между погрешностями рабочих средств измерений и эталонов. Развит метод определения соотношения между погрешностями образцовых и поверяемых средств измерений. Перечисленным вопросам посвящены работы [18—20]. На основе этих работ составлен нормативный документ МИ 73—76 «Методика определения параметров поверочных схем».

Исследован также вопрос о межповерочных интервалах. Разработана методика корректировки межповерочных интервалов, основанная на учете относительного числа приборов, признаваемых при поверке негодными [21].

Одной из задач метрологии является установление требований к свойствам средств измерений, т. е. формирование их метрологических свойств, и стандартизация как методов нормирования, так и градаций средств измерений по точности. Эти задачи не новы. Выработанные и проверенные практикой методы их решений положены в основу разработанного ВНИИМ ГОСТ 13600-68 «Средства измерений. Классы точности. Общие требования» [22, 23] и Рекомендации 34 МОЗМ «Классы точности средств измерений (секретариат-докладчик — СССР; в стране работу возглавлял ВНИИМ).

---

* См. стр. 17.

Разработан метод расчета погрешностей средств измерений, основанный на вычислении вероятности изготовления средств измерений с погрешностью, не превышающей заданного предела [24, 25].

Из других проблем приборостроения к задачам метрологии можно отнести анализ предельных возможностей средств измерений. Такой анализ проведен применительно к электромеханическим приборам, предельные возможности которых в принципе определяются тепловыми флуктуациями электрических зарядов входной цепи. На примере гальванометрических автокомпенсаторов оценен теоретический предел чувствительности при заданных времени успокоения и сопротивлении входной цепи [26, 27]. В этих работах, в частности, показано, что созданные во ВНИИМ приборы НФК и ПФК по чувствительности близки к пределу.

Важное место среди работ по теоретической метрологии занимают работы по систематическому развитию теории погрешностей измерений. С одной стороны, эти работы должны облегчить экспериментаторам выбор метода обработки результатов наблюдений при измерениях, с другой — вести к унификации применяемых методов. Последнее способствует повышению сопоставимости результатов измерений и оценок их погрешностей. После завершения работ в этом направлении были опубликованы рекомендации по методам обработки результатов наблюдений при прямых [28] и косвенных [29] измерениях. Особенность этих работ состоит в том, что предусмотрен учет не только случайных, но и неисключенных систематических погрешностей [30]*. Развиты методы построения доверительных интервалов, а также методы оценивания среднего взвешенного и его погрешностей [31]. Разработана удобная для практика методика построения композиции распределений [32]. Подготовлен стандарт на методы обработки результатов наблюдений при прямых измерениях (ГОСТ 8.207-76), в котором, в частности, стандартизованы значения вероятности, принимаемой при расчете доверительных погрешностей, и уровни значимости для проверки гипотез о виде распределений погрешностей. Результаты этих работ обобщены в монографии [48]. Обработка результатов наблюдений была и ранее предметом исследования метрологов института. Одной из наиболее известных работ в этом направлении является монография Е. Ф. Долинского [33], посвященная применению метода наименьших квадратов. Следует также отметить работу [34]. Для статистической обработки результатов наблюдений и оценивания погрешностей измерений большое значение имеют распределения погрешностей средств измерений. Изучение этого вопроса проведено на основе большого статистического

---

* См. стр. 27.

материала, собранного за ряд лет с 1969 г. Анализ этих данных привел к важному выводу о том, что распределения часто статистически неустойчивы, причем приходится констатировать не только существенное изменение оценок параметров, но даже вида распределений [35—38].

Выполнены анализ и разработка отдельных вопросов математической статистики применительно к проблемам теоретической метрологии. Дан обзор методов обработки результатов наблюдений, не требующих точного знания вида функции распределения. Развиты методы решения данной задачи при отличающихся от нормального распределениях наблюдений [39]. Составлен обзор методов проверки однородности выборочных данных [40].

Выполнен анализ применимости понятий современной теории информации в метрологии [41]. В метрологической практике выбор изучаемого объекта и тем самым фиксация измеряемой величины производится до измерения. В таких ситуациях не оправдано использование функции распределения измеряемых величин, которая составляет исходный постулат теории информации в метрологии. Показательно, что несмотря на многочисленные публикации, на основе информационных представлений до сих пор не решена ни одна новая метрологическая задача.

Если для измерений с использованием средств измерений в статическом режиме вопросы расчета погрешностей в главных чертах решены, то для случаев применения средств измерений в динамическом режиме эти вопросы требуют дополнительных исследований. В этом направлении выполнена работа [42], в которой сформулированы основные понятия теории динамических измерений. Разработаны предложения по нормированию динамических характеристик средств измерений [43] и ГОСТ 8.256-77. Дан обзор математических методов и методов теории автоматического регулирования применительно к задаче определения динамических характеристик средств измерений [44]. Отмечены ситуации, при которых становится актуальной проблема некорректности. С учетом метрологических требований разработан новый метод определения динамических характеристик средств измерений (включая соответствующие программы для ЭВМ) [45, 46]. Вопросы оценивания динамических погрешностей рассмотрены в работе [47].

Настоящий обзор дает представление о наиболее существенных из опубликованных работ. Выполненные исследования нужно рассматривать как первые результаты планомерной работы по проблемам теоретической метрологии, проводимой ВНИИМ. Работа в этом направлении будет продолжаться, так как круг вопросов, требующих углубленного изучения, постоянно расширяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии. М., Стандартгиз, 1949.

2. **Тиходеев П. М.** Очерки об исходных измерениях. М.—Л., Машгиз, 1954.

3. **Стандарты** в приборостроении, ч. I. М., Гос. изд-во оборонной промышленности, 1940.

4. **Широков К. П.** Документы СЭВ по единицам физических величин. — Измерительная техника, 1972, № 5.

5. **Широков К. П.** Интерпретация уравнений связи между физическими величинами. — Труды метрологических институтов СССР, Л., Энергия, 1977, вып. 200 (260).

6. **Широков К. П.** Еще раз о рационализации уравнений электромагнитного поля. — Измерительная техника, 1965, № 6.

7. **Широков К. П.** Рационализация угловых единиц. — Измерительная техника, 1972, № 7.

8. **Широков К. П.** Теоретические вопросы образования производных единиц. — Труды метрологических институтов СССР, Л., Энергия, 1977, вып. 200 (260).

9. **Широков К. П.** О статусе угловых единиц. — Измерительная техника, 1978, № 9.

10. **Широков К. П.** О проекте рекомендации ВНИИМ «Основные метрологические термины и определения». — Труды ВНИИМ, М.—Л., Стандартгиз, 1962, вып. 57 (117).

11. **Широков К. П.** Новый государственный стандарт «Метрология. Термины и определения» (ГОСТ 16263-70). — Измерительная техника, 1971, № 10.

12. **Широков К. П.** Об основных понятиях метрологии. — Труды метрологических институтов СССР. М.—Л., Изд-во стандартов, 1972, вып. 130 (190).

13. **Ясноржевский Е., Мачубский Т., Широков К. П.** Терминологическая работа по метрологии в рамках СЭВ. — Измерительная техника, 1974, № 6.

14. **Исаев Б. М., Широков К. П.** Новый государственный стандарт «Эталоны и образцовые средства измерений». — Измерительная техника, 1971, № 7.

15. **Широков К. П., Селиванов М. Н., Селиванов П. Н.** Работы ВНИИМ по стандартизации в области метрологии. — Измерительная техника, 1975, № 9.

16. **Рабинович С. Г., Троицкий Е. А., Сирая Т. Н.** Разработка теоретических обоснований необходимости создания эталонов. — Метрология и измерительная техника, 1974, № 11.

17. **Сирая Т. Н., Троицкий Е. А.** Метрологические характеристики групповых эталонов и условия их создания. — Метрология и точные измерения, 1976, № 11.

18. **Рабинович С. Г., Резник К. А.** Определение числа разрядов поверочных схем. — Измерительная техника, 1972, № 9.

19. **Резник К. А.** Соотношение между погрешностями образцового и поверяемого приборов. — Метрология, 1971, № 1.

20. **Резник К. А.** Математико-статистический анализ систем передачи размеров единиц физических величин от государственных эталонов рабочим средствам измерений. Автореф. канд. дисс. Л., ВНИИМ, 1974.

21. **Казаков О. А.** Разработка методов расчета периодичности поверки средств измерений. Автореф. канд. дисс. Л., ВНИИМ, 1973.

22. **Широков К. П., Рабинович С. Г.** О классах точности средств измерений. — Измерительная техника, 1969, № 4.

23. **Рабинович С. Г.** Общие методы нормирования и экспериментального определения погрешностей средств измерений.— Труды метрологических институтов СССР, Л., Энергия, 1977, вып. 200 (260).

24. **Рабинович С. Г.** К расчету погрешности измерительных приборов. — Измерительная техника, 1968, № 2.

25. **Кудряшова Ж. Ф.** Расчет погрешностей многопредельных средств измерений. — Метрология, 1976, № 9.

26. **Рабинович С. Г.** Гальванометрические автокомпенсационные приборы. М., Изд-во стандартов, 1972.

27. **Троицкий Е. А.** Вопросы разработки высокочувствительных фотогальванометрических автокомпенсаторов тока и напряжения и исследование их предельных возможностей. Автореф. канд. дисс. Л., ВНИИМ, 1972.

28. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г., Резник К. А.** Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. — Труды метрологических институтов СССР. М.—Л., Изд-во стандартов, 1972, вып. 134 (194).

29. **Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г.** Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях. — Труды метрологических институтов СССР. М.—Л., Энергия, 1975, вып. 172 (232).

30. **Рабинович С. Г.** Методика вычисления погрешности результата измерения. — Метрология, 1970, № 1.

31. **Кудряшова Ж. Ф.** Разработка и обоснование методов статистической обработки результатов наблюдений при прямых и косвенных измерениях высокой точности. Автореф. канд. дисс. Л., ВНИИМ, 1976.

32. **Грачев И. А., Рабинович С. Г.** Приближенный способ построения композиции нескольких распределений. — Измерительная техника, 1968, № 1.

33. **Долинский Е. Ф.** Обработка результатов измерений. М., Изд-во стандартов, 1973.

34. **Рабинович Б. Е.** Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений. — Труды ВНИИМ. М.—Л., Стандартгиз, 1962, вып. 57 (117).

35. **Резник К. А.** О реальных распределениях погрешностей измерительных приборов. — Метрология, 1970, № 3.

36. **Яковлева Т. Л.** Исследование стабильности распределений погрешностей средств измерений. — Метрология, 1977, № 2.

37. **Яковлева Т. Л.** Стабильность распределений погрешностей измерительных приборов. — Труды метрологических институтов СССР. М.—Л., Энергия, вып. 200 (260).

38. **Рабинович С. Г., Яковлева Т. Л.** Анализ устойчивости во времени распределений погрешностей средств измерений. — Метрология, 1977, № 7.

39. **Грачев И. А.** Оценка измеряемой величины при равномерном распределении вероятностей. — Измерительная техника, 1973, № 5.

40. **Сирая Т. Н.** Методы проверки статистической однородности групп наблюдений. — Труды метрологических институтов СССР. М.—Л., Энергия, 1977, вып. 200 (260).

41. **Рывкин А. С.** О применении понятий теории информации к задачам измерительной техники. — Измерительная техника, 1968, № 2.

42. **Широков К. П., Арутюнов В. О., Грановский В. А. и др.** Основные понятия теории динамических измерений. — Измерительная техника, 1975, № 12.

43. **Арутюнов В. О., Грановский В. А., Рабинович С. Г.** Нормирование и определение динамических свойств средств измерений. — Измерительная техника, 1975, № 12.

44. **Грановский В. А.** Методы обработки экспериментальных данных при определении динамических характеристик средств измерений. — Метрология, 1975, № 1.

45. **Грановский В. А., Этингер Ю. С.** Методика определения динамических свойств средств измерений. — Метрология, 1974, № 10.

46. **Грановский В. А.** Методика оценивания точности определения полных динамических характеристик средств измерений. — Измерительная техника, 1977, № 7.

47. **Грановский В. А.** О пригодности средств измерений для работы в динамическом режиме с погрешностью, не превышающей заданную. — Труды метрологических институтов СССР. М., Изд-во стандартов, 1975, вып. 157 (217).

48. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений. Л., Энергия, 1978.

Поступила в редакцию
24.8.1977 г

УДК 53.081.389

С. В. ГОРБАЦЕВИЧ

РОЛЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ В СОВРЕМЕННОЙ МЕТРОЛОГИИ

Фундаментальные физические константы в современной метрологии приобретают особое значение в связи с тем, что в ряде случаев позволяют отказаться от специфицированных эталонов и перейти на эталоны, основанные на физических константах или устойчивых физических процессах. Прежде чем излагать роль констант, остановимся кратко на некоторых особенностях воспроизведения единиц.

Вопрос о том, какого размера величину принять за единицу и каким путем проводить измерения величины, принимаемой за единицу, задается ее (единицы) определением, измерение же величины в принятой единице есть воспроизведение * единицы. При этом имеется в виду, что воспроизведение единицы осуществляется с наивысшей достижимой точностью в национальном метрологическом центре.

Более чем сто лет тому назад, когда вводилась метрическая система, после различных промежуточных этапов размер метра был задан расстоянием между двумя штрихами на платино-иридиевом стержне х-образного сечения. Аналогично размер килограмма был задан массой платино-иридиевого цилиндра, высотой и диаметром, равным приблизительно 39 мм. Это является одним из примеров того, как создание эталонов, а следовательно, и воспроизведение единиц предшествовало их определению.

К этим размерам единиц исследователи шли сложными путями. Вначале за метр принимали одну десятимиллионную долю четверти земного меридиана, а за единицу массы — количество воды при нуле градусов Цельсия объемом в один кубический сантиметр. Это оказалось сложным и непрактичным, но оно было началом задания размеров величин, принимаемых за

* Несмотря на то, что термин «воспроизведение» давно применяется в русской метрологии, он представляется нам крайне неудачным.

единицы длины и массы *. Таким образом, мы видим, что единица массы имеет метрическое происхождение.

Эталон метра в виде платино-иридиевого стержня со штрихами и определение метра как расстояние между штрихами просуществовало до 1948 г. Однако уже в 30-е годы текущего столетия стало ясно, что такое воспроизведение метра неудовлетворительно из-за отсутствия гарантии в постоянстве расстояния между штрихами вследствие структурных изменений в материале стержня. В СССР, США, Англии, Германии были начаты работы по определению длины метра через количество длин световых волн, укладывающихся между двумя штрихами. Эти исследования имели свою предысторию. К этому времени в оптике получили широкое распространение интерферометры. Наибольшее внимание было уделено изучению линий кадмия-114, ртути-198 и криптона-86. После тщательного анализа полученных результатов в 1960 г. XI Генеральная конференция мер и весов приняла новое определение метра как длины, на которой укладывается 1650763,73 длин волн излучения атома криптона-86 в вакууме при переходе между уровнями $2P_{10}$ и $5d_5$. Это было первое в истории метрологии определение единицы, основанное на устойчивом физическом явлении, характеризуемом постоянством длины волны излучения атома криптона при указанном переходе. Второй единицей, определение которой основывается на устойчивых физических явлениях, является секунда. Определение секунды основывалось на астрономических явлениях и в конечном итоге она определялась как доля тропического года, отнесенного к 1900 г. Этот год был выбран по той причине, что такая секунда была наиболее близкой к средней секунде за последние 300 лет.

Однако развитие квантовой электроники и создание мазеров (аммиачных, водородных), дающих колебания устойчивой частоты, позволило обнаружить неустойчивость периодического движения Земли как вокруг собственной оси, так и вокруг Солнца. Это позволило физикам, астрономам и метрологам определить секунду на основе устойчивых атомных явлений. По согласованию с Международным союзом астрономов и с Международным союзом чистой и прикладной физики Генеральная конференция мер и весов в 1967 г. приняла новое определение секунды как промежутка времени, в течение которого происходит 9120631770 периодов излучения атома цезия-133 при сверхтонком переходе. Это было второе в истории метрологии определение единицы, основанное на устойчивом физическом явлении, характеризуемом постоянством периода излучения атома цезия при указанном переходе.

---

* Понятия «масса» и «вес» были разграничены метрологами лишь на III Генеральной конференции мер и весов в 1901 г., несмотря на то, что в механике это было ясно со времен Ньютона.

Оставим на некоторое время вопрос о килограмме и перейдем к электрическим единицам и в первую очередь к амперу — четвертой основной единице Международной системы.

С 1948 г. единицы электрических величин перестали образовывать собственную систему единиц с точки зрения их определения и воспроизведения и была образована единая система механических и электрических единиц. Следует напомнить, что единые системы существовали и ранее, такие, как СГС (Гауссова), СГСЕ(M) (Максвелла), однако эталонов для воспроизведения единиц электрических величин в абсолютной мере не было. И только с начала XX столетия в Национальной физической лаборатории Англии и в Национальном бюро стандартов США, а с 40-х годов во ВНИИМ (СССР) начали проводиться работы по созданию эталонов для воспроизведения абсолютного ампера и абсолютного ома. Это позволило к началу 50-х годов установить соотношения между абсолютным и международным ампером, а также между абсолютным и международным омом.

Именно эти соотношения позволили сделать реальной систему МКСА, так как всем мерам э.д.с. (нормальные элементы) и сопротивлениям (катушки) можно было приписать значения в абсолютных единицах.

После 1948 г. работы по воспроизведению ампера в абсолютной мере с целью уточнения его размера продолжались в ряде метрологических учреждений, в том числе и во ВНИИМ. В процессе их проведения преодолевались большие технологические и экспериментальные трудности, однако наименьшая погрешность результата оценивалась на уровне $(4—8)\cdot10^{-6}$.

В эти годы было открыто явление ядерного магнитного резонанса, позволившее измерить величину гиромагнитного отношения протона γ_p. Из соотношения $\gamma_p B=\omega$ (где ω — резонансная частота прецессии протона в магнитном поле с индукцией B) видно, что точность измерения γ_p ограничивается точностью измерения магнитной индукции B (имеется в виду, что точность измерения ω не влияет на точность результата γ_p).

Возможность точного измерения гиромагнитного отношения протона сразу же привлекла внимание зарубежных и советских метрологов. Во ВНИИМ измерение γ_p производилось в слабых полях, в Харьковском институте метрологии — в сильных полях. Большой интерес к этой фундаментальной физической константе объясняется тем, что имелось в виду основывать на ней воспроизведение ампера. Однако, по-существу, степень сложности этого эксперимента не меньше, чем при работе с токовыми весами. Элементарный анализ показывает, что для воспроизведения ампера следует измерить γ_p в слабом и сильном поле, но погрешности при этом будут не меньше, чем в классическом случае токовых весов. Тем не менее, работы по измерению γ_p во ВНИИМ и ХГИМИП [2, 3] внесли значительный вклад в решение общей проблемы уточнения и согласования констант.

Новая эра в метрологии наступила после открытия в 1962 г. эффекта, получившего по имени автора название эффекта Джозефсона. Этот эффект устанавливает связь напряжения между двумя сверхпроводниками, разделенными слоем диэлектрика толщиной 1—2 нм (переход Джозефсона), в присутствии внешнего электромагнитного поля и частоты этого поля через фундаментальные физические константы

$$2\,e\,U = nh\,\nu,$$

где e — заряд электрона; h — постоянная Планка; ν — частота внешнего электромагнитного излучения; n — число ступеней вольт-амперной характеристики; U — напряжение на переходе. Отсюда

$$U = n\frac{h}{2e}\nu, \qquad (1)$$

где $\frac{h}{2e}$ — фундаментальная физическая константа, называемая квантом магнитного потока.

Если за основу взять единицу э.д.с., хранимую эталоном вольта СССР, то $h/2e$ будет выражено в вольт-секундах, так как простой схемой с делителем напряжения можно получить соотношение $U = \frac{E}{k}$, где E — э.д.с. эталона вольта, k — коэффициент деления.

Из выражения (1) следует, что поддержание некоторой условной единицы э.д.с. (например, $B_{СССР}$ не требует знания величины $h/2e$. Действительно, отмечая индексами 1, 2, ..., n величины, получаемые при измерениях в некоторые моменты t_1, t_2, ..., t_n, имеем

$$\frac{E_1}{k_1} = n_1\frac{h}{2e}\nu_1,\ \frac{E_2}{k_2} = n_2\frac{h}{2e}\nu_2\ldots\ \frac{E_n}{k_n} = n_n\frac{h}{2e}\nu_n,$$

где E_1, E_2, ...E_n относятся к одной и той же эталонной мере (нормальному элементу).

Такая процедура может быть повторена для каждой меры, входящей в групповой эталон. Из приведенных выражений следует, что относительные изменения $\frac{\Delta E_{12}}{E_1}, \frac{\Delta E_{13}}{E_1}, \ldots, \frac{\Delta E_{1n}}{E_1}$ и т. д. не содержат $h/2e$ и, следовательно, легко могут быть вычислены через соответствующие k_i, n_i и ν_i.

Приведенная методика контроля за изменением э.д.с. эталона вольта [4], а следовательно, и поддержания вольта не является воспроизведением вольта в абсолютной системе единиц.

Для того, чтобы воспроизвести вольт, необходимо иметь значение $h/2e$. Тогда в любой момент времени измерение U и определение E по коэффициенту деления k будет измерением э.д.с. эталонного нормального элемента или их группы, составляющей эталон, а следовательно, и воспроизведением вольта. Идея воспроизведения вольта по значению $h/2e$, вычисленному по константам неэлектрического происхождения, принадлежит ВНИИМ [5—7].

Можно показать, что $h/2e$ выражается формулой

$$\frac{h}{2e}=\frac{c_0}{4}\sqrt{\mu_0\frac{m_e}{m_p}\cdot\frac{M_p}{R_\infty}\cdot\frac{\alpha}{N}}, \qquad (2)$$

где c_0 — скорость света в вакууме, μ_0 — постоянная системы, равная $4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м, $\frac{m_e}{m_p}$ — отношение масс покоя электрона и протона, M_p — атомная масса протона, α — постоянная тонкой структуры, R_∞ — постоянная Ридберга, N — число Авогадро.

Характерная особенность выражения $h/2e$ через другие константы заключается в том, что кроме величины μ_0, которая является точно заданной, все другие константы имеют неэлектрическое происхождение.

В настоящее время c_0, $\frac{m_e}{m_p}$, M_0 и R_∞ известны с достаточно высокой степенью точности, и погрешность, вносимая ими в расчет $h/2e$, а следовательно, и в результат измерения U (и E), находится на уровне 10^{-8}. Основной вклад в погрешность вносят константы α и N.

Значительные успехи достигнуты советскими исследователями в измерении c_0 (ХГИМИП, Сибирское отделение АН СССР) [8] и в измерении магнитного момента протона в ядерных магнетонах μ_p/μ_N (Физико-технический институт АН СССР) [9], определяющего погрешность отношения m_e/m_p.

Во ВНИИМ ведутся работы по измерениям α и N в связи с необходимостью их уточнения для воспроизведения вольта в абсолютной системе единиц. Здесь прежде всего возникает вопрос: является ли воспроизведение вольта альтернативой воспроизведению ампера и не меняет ли это принятой системы единиц? Ответ на поставленный вопрос может быть только один — воспроизведение вольта является полноправной заменой воспроизведению ампера и не меняет принятой системы единиц (СИ). Добавим лишь, что это справедливо при условии, когда вольт воспроизводится, чего до сих пор мы не имеем. Действительно, воспроизведение международного ампера по серебряному вольтметру, как и воспроизведение абсолютного ампера по токовым весам, было единственным способом определить э.д.с. эталонных нормальных элементов соответственно в международных вольтах и в абсолютных вольтах. Естественно, что при этом имеется в виду и наличие эталонных мер сопротивления, выраженного в соответствующих омах (международных и абсолютных). Если бы применение конденсаторных весов могло обеспечить измерение напряжения между пластинами хотя бы с такой точностью, как измерение тока посредством токовых весов, то, несомненно, в свое время выбор пал бы на конденсаторные весы. Теперь же использование физических констант позволяет применить переходы Джозефсона для измерения э.д.с. эталонных нормальных элементов с точностью, значительно превышающей точность измерения на токовых весах.

Возвратимся к вопросу об эталоне килограмма. Если метр и секунда определяются и воспроизводятся по устойчивым физическим явлениям, то килограмм остается таким, каким он был при введении метрической системы. Нельзя утверждать, сохранилась ли масса прототипа или изменилась вследствие каких-либо причин. Иными словами, все, что присуще чисто специфицированному эталону, присуще и эталону килограмма. В настоящее время среди метрологов существует точка зрения, что масса может быть представлена некоторым кристаллом с определенным числом атомов и с известной постоянной кристаллической решетки. Формула, связывающая число Авогадро с массой кристалла и его физическими и геометрическими характеристиками, имеет следующий вид: $N=\frac{fM}{\rho d^3\Phi}$,

где N — число Авогадро, M — масса грамм-молекулы кристалла, ρ — плотность кристалла, d — постоянная кристаллической решетки, Φ — коэффициент, зависящий от кристаллической структуры, f — число атомов (молекул) в одной ячейке кристалла объемом $d^3\Phi$. Из нее следует, что для установления «естественного» эталона массы необходимо в первую очередь измерить число Авогадро. Таким образом, эта константа приобретает значение не только для воспроизведения вольта, но и для воспроизведения килограмма. Правда, требуемые точности отличаются примерно на два порядка. Целью работы по определению N является дальнейшее уточнение этой константы, которое позволит перейти на новый килограмм.

Исходя из требований современной метрологии [10], точность значений той или иной константы зависит не только от экспериментального определения, но и от методов их согласования. Такое согласование производится в связи с тем, что результаты, полученные разными исследователями, расходятся как в пределах точности измерений, так и в пределах, выходящих из этих рамок. Кроме того, полученные данные обычно не удовлетворяют тем жестким зависимостям, которые предписываются связями, существующими между константами. В связи с этим советские метрологи подняли вопрос о необходимости разработки оптимальных принципов согласования констант. В частности, была предложена методика получения окончательных согласованных значений констант. Суть предложенной методики заключается в том, что устранение несовместности различных экспериментальных значений констант производится не исключением большой части значений из рассмотрения, а путем индивидуального расширения погрешностей различных значений. При этом первоначальные оценки погрешностей изменяются в некотором смысле минимально.

Среди экспериментальных работ, проводившихся в последние годы во ВНИИМ, следует отметить такие, как определение магнитного момента протона в магнетонах Бора, магнитного момента протона в ядерных магнетонах, исследование атомных пучков водорода с целью нахождения таких энергетических переходов, которые в наилучшей мере могут быть использованы для измерения постоянной тонкой структуры. Проведены расчеты систематических погрешностей в выражении для зависимости

$$\alpha = f(\nu)$$

где ν — частота перехода, α — постоянная тонкой структуры Большого внимания заслуживают работы по использованию эффекта Джозефсона в метрологических целях. Была создана установка, которая позволила произвести измерения э.д.с. нормальных элементов при некотором значении $h/2e$, принятом в международном масштабе. Следует указать, что это первая работа в области электрических эталонов, в которой было использовано явление сверхпроводимости.

Использование фундаментальных физических констант позволяет подойти к решению следующей проблемы.

В первую очередь, необходимо уточнить значения констант, на основе которых можно построить эталоны электрических и магнитных величин. Как уже было сказано, к таким константам относятся постоянная тонкой структуры и число Авогадро. Существующие методы позволяют определить их значения с погрешностью не более чем $1 \cdot 10^{-6}$ и, таким образом, повысить точность воспроизведения вольта почти на два порядка. Кроме того, большое значение как для воспроизведения ампера, так и для согласования значений фундаментальных физических констант, имеют эксперименты по определению гиромагнитного отношения протона. Результатом этих работ должно быть снижение погрешности значения γ_p до $(3-5) 10^{-7}$.

Не меньшее значение имеет дальнейшее повышение точности определения числа Авогадро с целью перехода на естественный эталон единицы массы — килограмма. Имеется реальная возможность получить значение этой константы с погрешностью не более $1 \cdot 10^{-8}$, однако для этого следует провести ряд исследований. В частности, необходимо значительно повысить точность определения молекулярной массы монокристалла кремния, из которого изготавливается рентгеновский итерферометр. Для этой цели предполагается использовать монокристалл, выращенный из моноизотопа кремния.

Выполнение всего комплекса работ по уточнению значений фундаментальных физических констант позволит перейти на качественно новую систему взаимосвязанных эталонов единиц физических величин.

В заключение следует остановиться на последовательности, в которой как бы «переплетаются» такие задачи, как воспроизведение единиц физических величин и определение физических констант, и которую по существу можно назвать методологией современной метрологии.

Действительно, в настоящее время благодаря применению очень сложной измерительной аппаратуры измерение длины, а следовательно, и воспроизведение длины осуществляется счетом длин волн определенного излучения. Аналогично воспроизведение единицы осуществляется счетом периодов определенного излучения. В принципе, когда измерительная аппаратура достигнет требуемой точности, единицу массы можно будет установить на основе счета атомов, заключенных в том или ином количестве вещества. Таким образом, единицы длины, массы и времени устанавливаются либо путем счета физических процессов, характеризуемых неизменными параметрами, либо путем счета физических объектов — атомов или молекул. Это можно назвать первой ступенью метрологии. Второй ступенью является определение размерных физических констант — скорости света, постоянной Ридберга, число Авогадро и безразмерных констант постоянной тонкой структуры, отношения масс и моментов элементарных частиц. Следующим этапом должен быть выбор (по размеру) и воспроизведение единицы электрической величины.

Как было показано выше, наиболее удобным является выбор вольта и его воспроизведение на основе эффекта Джозефсона, причем для абсолютной системы практических электрических единиц выбор размера вольта (также, как и ампера) влечет за собой введение постоянной системы единиц $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А².

После воспроизведения вольта (или ампера) все остальные константы нетермодинамического происхождения могут определяться в единой системе механических и электрических единиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горбацевич С. В.** Определение и воспроизведение единиц физических величин. — Метрология, 1972, № 12.

2. **Студенцов Н. В., Маляревская Т. Н., Шифрин В. Я.** Измерение значения гиромагнитного отношения протона в слабом магнитном поле. — Измерительная техника, 1968, № 11.

3. **Ягола Г. К., Зингерман В. И., Сепетый В. Н.** Определение значения гиромагнитного отношения протона. — Измерительная техника, 1962. № 5.

4. **Горбацевич С. В., Краснов К. А.** Перспективы применения эффекта Джозефсона для воспроизведения и поддержания вольта. — Метрология, 1971, № 8.

5. **Арутюнов В. О.** Основы совершенствования системы эталонов единиц электрических величин. — Измерительная техника, 1974, № 10.

6. **Горбацевич С.В., Холин В. М.** Воспроизведение абсолютного вольта через физические константы с использованием эффекта Джозефсона. — Измерительная техника, 1973, № 3.

7. Arutyunov V. O., Gorbatzevich S. V., Krasnov K. A. Ways of improvement in the accuracy of the electrical and magnetic standards. — Colloque International sur l'Electronique et la Mesure, Paris, 26—30 Mai, 1975.

8. **Лейкин А. Я., Сикора С. В., Соловьев В. С. и др.** Об измерении скорости света и создании мер частоты в субмиллиметровом диапазоне., — В кн. Материалы Украинской республиканской научно-технической конференции, посвященной 50-летию метрологической службы УССР, Харьков, 1972.

9. **Мамырин Б. А., Аруев Н. Н., Алексеенко С. А.** Измерение магнитного момента протона в ядерных магнетонах с относительной погрешностью $4{,}3 \times 10^{-5}$%. — Л., Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе, 1971, № 374.

10. **Паркер В. Г., Лангенберг Д. Н.** Фундаментальные константы и квантовая электродинамика. — Пер. с англ. Под ред. Б. А. Мамырина, М., Атомиздат, 1972.

Поступила в редакцию
29.9.1977 г.

УДК 536.5.081

Б. Н. ОЛЕЙНИК, К. С. ИЗРАИЛОВ

ОСОБЕННОСТИ ПРОБЛЕМЫ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПЕРЕДАЧИ РАЗМЕРА ЕДИНИЦЫ ТЕМПЕРАТУРЫ — КЕЛЬВИНА

Высокоточное измерение температуры является одной из основных задач метрологии, решение которой на практике вырастает в целую проблему в силу специфических особенностей, присущих температуре и выделяющих ее среди большого ряда других физических величин.

Поэтому изучение этих особенностей является необходимым этапом ее исследования. Обсудим этот вопрос в идейном плане, опираясь на информацию, которую можно извлечь из статистической термодинамики [1—6].

Особенности свойств температуры

Рассмотрим состояние макроскопической системы как описание совокупности всех ее измеряемых свойств (параметров) и внутреннюю энергию системы «U_c» будем связывать с представлением об «энергетическом» состоянии. Тогда найдем, что указанные свойства в своем большинстве будут зависеть, наряду с энергией, от абсолютной температуры «T» системы. Поэтому температуру следует считать по праву основным параметром состояния. Среди других параметров, а также в фундаментальных концепциях и формулировках теории она занимает ведущее положение.

В соответствии с этой «гегемонической» ролью температуры в науке и технике, количественное ее определение и, тем более, установление температурной зависимости для всех других свойств, составляющее главную задачу термометрии, невозможно без глубокого знания физической природы температуры. Только опираясь на физический смысл температуры, эту задачу можно решить правильно и однозначно в пределах возможной и допустимой погрешности.

Квантовомеханический аспект вопроса

Физическую интерпретацию понятия температуры нельзя ограничить рамками феноменологической термодинамики, используя ее основные законы, так как концепция температуры должна сводиться, в конечном счете, к указанию связи температуры и ее свойств с теми характеристиками, которые лежат в основе современной модели и теории строения вещества. Наиболее строгим является при этом квантовомеханическое описание состояния и поведения системы. Напомним, что такое детальное изучение системы приводит к выводу о том, что ее можно обнаружить с некоторой вероятностью в одном из большого ряда возможных дискретных квантовых (микроскопических) состояний, соответствующих определенным уровням энергии. Самому низкому (из возможных) значению энергии U_0 отвечает основное состояние. Квантовое состояние системы задается указанием набора квантовых чисел, характерных для нее и принимающих в зависимости от энергии определенные допустимые дискретные численные значения. С ростом энергии системы может расширяться как набор квантовых чисел, так и круг их численных значений. Макроскопичность системы определяется широтой набора квантовых чисел, называемых числом f_c степеней свободы и, в частном случае, характеризуется числом N_0 частиц системы.

В дальнейшем речь будет идти только о макроскопических системах, обладающих достаточно большим числом f_c степеней свободы, потому, что только для таких систем понятие «температура» будет иметь смысл. При этом число f_c должно быть порядка числа Авогадро или больше его, т. е.

$$f_c \approx 10^{24} \tag{1}$$

Предположим, что неизбежное, в принципе, взаимодействие макросистемы с окружающей средой настолько слабо, что систему с требуемой точностью можно считать изолированной. Тогда, поскольку система велика ($f_c \approx 10^{24}$) и должна удовлетворять заданным условиям своего существования, возможные для нее состояния окажутся вполне определенными, но ограниченными достаточно большим значением N_c (U_c) из числа «доступных квантовых состояний». К последним относятся состояния, между которыми система может самопроизвольно (в силу остаточного взаимодействия) совершать переходы, совместимые с заданными условиями и ограничениями, вытекающими из общих законов физики (природы).

Примем, что условия «изоляции» системы могут быть заданы значениями некоторых макропараметров, характеризующих ее макросостояние. Например, это могут быть такие внешние параметры системы, как ее объем V или напряженность окружающего электромагнитного поля. Пусть также энергия изучаемой макросистемы принимает некоторое значение U_c. Практически это будет соответствовать тому, что эта энергия лежит в достаточно узком интервале от U_c до $U_c + \delta U$. Будем всегда считать интервал δU много меньше самой энергии U_c и меньше допустимой погрешности ее определения, но в то же время много больше как энергии отдельной частицы системы, так и расстояния между соседними уровнями ее энергии с тем, чтобы охватить достаточно большое число квантовых состояний. Такие условия вполне достижимы для макросистемы и при этом вероятности пребывания системы в различных доступных ей состояниях будут, вообще говоря, разными и могут изменяться с течением времени. Однако, как следует из законов статистической механики (в том числе, постулата равной априорной вероятности) и повседневного опыта, любая изолированная макросистема с энергией U_c должна со временем перейти в такое конечное (пока она изолирована) макросостояние, при котором с одинаковой вероятностью $1/N_c(U_c)$ ее можно обнаружить в любом из доступных ей микросостояний. Тогда из теории [3] следует, что такой переход, если, как указано, f_c велико, должен подчиняться следующим закономерностям:

а) число состояний $N_c(U_c)$ является очень быстро растущей функцией энергии U_c;

б) $$\ln N_c(U_c) \sim f_c \ln(U_c - U_0) + const\ ; \qquad (2)$$

в) при энергии U_c, достаточно превышающей энергию U_0 основного состояния, т. е. для $U_c \gg U_0$, величина $\ln N(U_c)$ имеет значение порядка f_c и практически не зависит от ширины интервала δU.

Вследствие этого, в конечной ситуации, вероятности допустимых состояний и найденные с их помощью средние значения параметров макросостояния (температуры, давления и др.) перестают быть зависимыми от времени, приобретая вполне определенное для данного состояния значение. Такое состояние можно назвать состоянием теплового равновесия. Заметим, что на практике мы обычно судим о тепловом равновесии именно по неизменности во времени значений макропараметров состояния, подразумевая под этим параметры, определенные с помощью макроскопических измерений.

Критерий теплового равновесия и физический смысл температуры

Пользуясь приведенными данными, установим критерий достижения теплового равновесия. Чтобы избежать абстрактности в рассуждениях, рассмотрим ситуацию, типичную для термометрии.

Пусть имеем изолированную макросистему, обладающую энергией U_c и большим числом f_c. Представим себе, что система состоит из двух макрочастей — подсистем A и B; подсистема A является термостатом, в котором реализована искомая температура (объектом измерения), а подсистема B — термометром (средством измерения). Предположим, что внешние параметры всей системы и подсистем остаются фиксированными, тем самым фиксируются и их уровни энергии, а работа в макроскопическом масштабе подсистем равна нулю. Тогда между A и B может происходить только тепловое взаимодействие, которое и определяется указанными требованиями. Поскольку вся система изолирована, то теплообмен между подсистемами A и B приведет их в тепловое равновесие друг с другом. В самом деле, определим вероятность $P(U_a)$ того, что подсистема A будет обладать энергией U_a.*

Если полное числое состояний, доступных данной системе, есть $N_c\ (U_c)$, причем $N_c = \mathrm{const}$, то вероятность $P\ (U_a)$ того, что подсистема A будет обладать энергией U_a (а подсистема B — энергией $U_s = U_c - U_a$, где $U_c = \mathrm{const}$, а потому и $N_c(U_c) = \mathrm{const}$ для изолированной системы) будет определяться поделенным на $N_c(U_c)$ числом $N_c(U_a,\ U_s)$ тех состояний данной системы, составляющих некоторую долю от полного числа $N_c(U_c)$, при которых реализуется указанная ситуация. Эта доля образуется, естественно, мультипликативно из чисел состояний $N_a(U_a)$ и $N_s\ (U_s)$, доступных подсистемам A и B, т. е.

$$N_C(U_A,U_B) = N_A(U_A)N_B(U_B). \qquad (3)$$

Поэтому искомая вероятность

$$P(U_A) = \frac{N_A(U_A)N_B(U_B)}{N_C(U_C)} = \mathrm{const}\, N_A(U_A)N_B(U_B). \qquad (4)$$

Поскольку с ростом U_a, в процессе теплообмена, значение U_s станет уменьшаться и поскольку N_a и N_s сами по себе являются быстро растущими функциями соответствующей энергии, то искомая вероятность $P\ (U_a)$ должна иметь максимум при некотором значении $U_a = U_{aм}$ (а также $U_s = U_{sм} = U_c - U_{aм}$) и число состояний, доступных данной системе при экстремальной ситуации, будет наибольшим из возможных при заданных условиях. Следовательно, при $U_a = U_{aм}$ у системы и ее подсистем действительно реализуются наиболее вероятные, постоянные во времени, макросостояния, называемые поэтому равновесными.

Можно показать, что чем макроскопичнее система (чем больше определяющие ее размеры числа f_c и N_0), тем острее будет максимум вероятности $P\ (U_{aм})$ и тем менее вероятными

* В подключках к обозначениям в тексте a и b соответствуют A и B в формулах.

окажутся те состояния, энергия которых будет заметно отличаться от экстремальных, наиболее вероятных значений $U_{ам}$ для A и $U_{вм}$ для B. В силу этого при равновесии, когда f_c велико, энергия U_a подавляющее время будет весьма близка к значению $U_{ам}$. В связи с этим средняя энергия $(U_a)_{ср}$ подсистемы A (и соответственно B) будет всегда близка к $U_{ам}$ $[U_{ам} \approx (U_a)_{ср}]$, а все макроскопически измеряемые параметры состояния будут определяться своими средними, т. е. практически наиболее вероятными равновесными значениями.

В качестве иллюстрации приведем следующую числовую оценку, используемую статистической физикой.

Если $f_{cм}$ означает число степеней свободы для меньшей из подсистем A и B, то искомая вероятность $P(U_a)$ становится пренебрежимо малой по сравнению со своим максимальным значением $P(U_{ам})$ при флуктуации энергии U_a (т. е. при отклонении от наиболее вероятного или среднего значения $|\Delta U| = |U_a - U_{ам}| \approx |U_a - (U_a)_{ср}|$, удовлетворяющей неравенству

$$|\Delta U| \geqslant \frac{|U_{AM} - U_{A0}|}{\sqrt{f_{CM}}}, \qquad (5)$$

где U_{a0} — энергия основного состояния подсистемы A. Отсюда следует, что $|\Delta U|$ тем меньше, чем больше f_c. Поэтому при повышении точности измерений макропараметров (энергии, температуры, давления и др.) необходимо прежде всего контролировать достаточность размера, т. е. макроскопичность системы, характеризуемую числами f_c или N_0. Кроме того, необходимо учитывать возрастание трудностей в достижении требуемой точности, когда система мала, а исследуемые состояния близки к ее основному состоянию. Вдали от этой ситуации, если $f_{cм} \approx 10^{24}$ (количество вещества близко к молю или превышает его), маловероятными становятся состояния, отвечающие относительной флуктуации порядка

$$\frac{|\Delta U|}{|U_{AM} - U_{A0}|} \approx \frac{|\Delta U|}{U_{AM}} > \frac{1}{\sqrt{f_{CM}}} = 10^{-12} \qquad (6)$$

При допустимой погрешности измерения, характеризуемой относительным СКО порядка 10^{-6}, значение (6) следует считать пренебрежимо малым. Однако для эталонных измерений таких параметров, как, например, частота, это значение существенно.

Таким образом, для измерения температуры (и других макропараметров состояния) непременными и наиболее благоприятными в метрологическом отношении являются условия, при которых исследуемая система достаточно велика и с большой точностью близка к состоянию теплового равновесия.

Основной критерий достижения равновесия выявляется при нахождении максимума функции $P(U_{в})$ с учетом заданных ограничений (при фиксированных внешних параметрах).

С помощью обычных математических процедур отыскания максимума (удобнее искать максимум $\ln P(U_{в})$), найдем, что при тепловом равновесии подсистем A и B должны становиться одинаковыми следующие значения статистических параметров, характеризующих тепловое состояние подсистем

$$\beta_A(U_{AM}) = \beta_B(U_{BM}), \tag{7}$$

где

$$\beta(U) = \left[\frac{1}{N(U)}\,\frac{\partial N(U)}{\partial U}\right]. \tag{8}$$

Из (8) видно, что фундаментальный параметр $\beta(U)$, позволяющий установить наличие теплового равновесия в макросистеме, характеризует собой в дифференциальной форме относительное изменение числа $N(U)$ доступных состояний системы, приходящееся на единицу изменения энергии. Подчеркнем, что речь идет об изменении энергии, обусловленном тепловым взаимодействием (внешние параметры системы, например, объем V, фиксированы). Этот параметр может быть также назван «энергетическим коэффициентом числа доступных состояний системы» при тепловом взаимодействии или, короче, «тепловым коэффициентом числа состояний, доступных макросистеме».

Анализ свойств параметра $\beta(U)$ показывает, что обратная его величина $\Phi(U) = \frac{1}{\beta(U)}$ и абсолютная температура, установленная по термодинамической шкале (по шкале Кельвина), идентичны по своим свойствам, т. е.

$$T = \frac{1}{\beta(U)} = \Phi(U) \tag{9}$$

если измерять их в энергетических единицах, и

$$T = \frac{1}{k\beta(U)} = \frac{\Phi(U)}{k}, \tag{10}$$

если $\Phi(U) = \frac{1}{\beta(U)}$ измерять в энергетических единицах, а T — ь кельвинах (k — постоянная Больцмана). Так, со всей строгостью, можно показать, что параметр $\Phi(U)$ подобно температуре T принимает одинаковое значение для макросистем A и B

в случае равновесия между ними, и поэтому это равенство может служить критерием достижения теплового равновесия: параметры T и $\Phi(U)$ синфазно растут с ростом энергии при фиксации числа f_c степеней свободы (число N_0 частиц); в случае разности между $\Phi(U)$ или T для подсистем A и B между ними возникает теплообмен и создается возможность для преобразования тепловой энергии в другие формы.

В статистической физике доказывается, что если B, находясь в тепловом контакте с A, будет поглощать небольшое количество тепла Q, т. е. $|Q| \ll (U_a)_{ср} - U_{ao}$ (следовательно, изменение средней энергии $\Delta U_{a\,ср} = Q$ невелико по сравнению с превышением средней энергии $(U_a)_{ср}$ над энергией U_{ao} основного состояния в подсистеме A), то параметры β_a (или Φ_a) и T_a для A будут незначительно изменяться, т. е.

$$\Delta\beta \ll \beta_a \text{ и } \Delta T_a \ll T_a.$$

Отсюда следует, что если B — термометр и A — термостат (объект измерения) и если подсистема B существенно меньше подсистемы A, то тепло, поглощенное подсистемой A, будет настолько мало, что всегда будет $\Delta T_a \ll T_a$ и $\Delta\beta \ll \beta_a$. Поэтому только при сравнительно малой подсистеме B (термометр $B<A$) ее тепловое взаимодействие с термостатом не может заметно изменить температуру последнего.

Перечисленное сопоставление свойств $\Phi(U)$ и T доказывает их идентичность.

Таким образом, с точки зрения квантовой механики температуру по ее физической сущности можно рассматривать как статистический параметр состояния макросистемы, связанный с относительным изменением числа доступных квантовых состояний, обусловленным изменением энергии в макросистеме. Точнее говоря, **абсолютная температура характеризует в процессе теплообмена степень изменения энергии макросистемы, обусловленного относительным изменением числа доступных ей состояний** и приобретает характерное для всех частей системы значение только в состоянии теплового равновесия.

Действительно, если энергия подсистемы A в процессе теплообмена с подсистемой B будет расти, то будет расширяться не только набор значений, которые могут принимать квантовые числа, но и сам набор квантовых чисел (в действие могут вступать не только поступательные, но и вращательные, колебательные, спиновые уровни энергии). Следовательно, будет расти и число степеней свободы f_c, т. е. макроскопичность системы, а с ним и число доступных системе квантовых состояний. Поэтому можно будет говорить и **о степени изменения энергии, приходящегося на единицу относительного изменения этого числа доступных состояний, т. е. об абсолютной температуре** T макросистемы. Поэтому температура определяется не внутренней энергией U_c, а ее распределением по числу степеней свободы f_c системы. Может оказаться, что подсистема B — термометр, обладая меньшей энергией $U_в$ и числом $f_в$, чем подсистема A — термостат, будет, тем не менее, находиться, по сравнению с ним, при более высокой температуре $(T_в, \Phi_в > T_а, \Phi_а)$. Для сравнения скажем, что если температура связана с относительным числом квантовых состояний, то энтропия S связана с самим числом этих состояний, точнее, с его логарифмом $[S = k\ln N(U)]$. Поэтому энтропия является мерой степени случайности состояний, характеризуемой их числом, тогда как температура T связана с интенсивностью, с которой эта степень изменяется с энергией.

С формальной точки зрения, связь S с T выражается в том, что значение абсолютной температуры соответствует значению частной производной от внутренней энергии по энтропии при фиксированных внешних параметрах $\left[T = \frac{\partial U}{\partial S}\right.$, где энтропия $\left.S = k\ln N(U)\right]$.

Сущность температуры в классическом приближении и его допустимость

Наиболее строгое, квантовомеханическое описание систем обусловлено корпускулярно-волновым дуализмом свойств материи. В тех случаях, когда волновые свойства микрочастиц вещества ощутимо не проявляются и потому их можно не учитывать, становится допустимым рассмотрение поведения системы в классическом приближении, при котором не принимаются в расчет квантовые эффекты (например, дискретность состояний).

Возможность такого подхода открывается тогда, когда микрочастицы удается индивидуализировать, т. е. локализовать их в пространстве с допустимой погрешностью и характеризовать их импульсом с достаточной точностью.

Критерий такой возможности вытекает, как известно, из принципа неопределенности Гейзенберга. С метрологических позиций этот принцип представляется следующим образом. Описание поведения динамической системы частиц в классическом аспекте (на основе законов классической механики) будет иметь смысл, если удается локализовать любую частицу системы с допустимой погрешностью $(\Delta q)_{доп}$. Тогда, согласно принципу неопределенностей, импульс $P = mv$ частицы можно одновременно определить с погрешностью

$$\Delta p > \frac{h}{2\pi(\Delta q)_{доп}} \qquad (11)$$

Если такая погрешность будет удовлетворять условию $\Delta p \ll p$ и если при этом ее можно считать приемлемой, то указанная локализация и, следовательно, классическое приближение возможны при условии, что

$$p \gg \Delta p \gg \frac{h}{2\pi(\Delta q)_{\text{доп}}}$$

или

$$\frac{h}{p} \ll 2\pi(\Delta q)_{\text{доп}} \qquad (12)$$

Согласно гипотезе де Бройля, с каждой частицей (телом) связана плоская волна длиной $\lambda_{б}$, причем между движением частицы и распространением этой волны существует взаимнооднозначное соответствие, так что импульс p частицы и длина волны $\lambda_{б}$ связаны условием $\lambda_{б} = \frac{h}{p}$.

Следовательно, критерием допустимости классического приближения при описании поведения системы движущихся частиц может служить условие

$$\lambda_{б} \ll 2\pi(\Delta q)_{\text{доп}} \qquad (13)$$

Иначе говоря, если минимальные, типичные для данной системы и рассматриваемой задачи, классические размеры или расстояния (диаметр или радиус взаимодействия молекул, минимальные средние расстояния между ними, средняя длина $\lambda_{ср}$ пути их свободного пробега и т. д.), определяющие значение $(\Delta q)_{\text{доп}}$, значительно превосходят длину $\lambda_{б}$ волны де Бройля, то волновые свойства частиц и связанные с ними квантовомеханические эффекты могут не учитываться в рамках указанной точности.

Мы останавливаемся на этом вопросе, во-первых, чтобы указать на необходимость его рассмотрения при высоких требованиях к точности измерения температуры, а во-вторых, чтобы подчеркнуть, что его решение зависит от условий существования и характера системы и, в первую очередь, от температуры и размеров системы, от массы и размеров частиц, а также от требований к допустимой погрешности определения искомых параметров.

В качестве примера рассмотрим следующую оценку. Средняя длина свободного пробега молекул (диаметр d) в идеальном газе (температура T, давление $p_г$) приблизительно равна

$$\lambda_{ср} \approx \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p_г}, \qquad (14)$$

Чтобы правильно судить о движении молекулы (скорость v, масса m), необходимо хорошо фиксировать ее координату q. Пусть для этого будет достаточным измерять q с погрешностью $(\Delta q)_{\text{доп}}$, составляющей 10% от $\lambda_{\text{ср}}$.

По принципу неопределенностей (11) с учетом (14) погрешность определения скорости молекулы составит

$$\Delta v \geqslant \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{hd^2 p_г}{kmT}. \tag{15}$$

Если в качестве меры скорости принять наиболее вероятное ее значение

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \tag{16}$$

то возможная относительная погрешность, допускаемая квантовыми условиями, будет

$$\left(\frac{\Delta v}{v_{\text{вер}}}\right)_{\text{кв}} \geqslant \frac{5hd^2 p_г}{\sqrt{mk^3T^3}}.$$

При $d = 10^{-8}$ см, $p_г = 1$ атм, $m = 4{,}6 \cdot 10^{-23}$ г (для азота) и $T = 50$ К это даст

$$\left(\frac{\Delta v}{v_{\text{вер}}}\right)_{\text{кв}} \geqslant 10^{-3}.$$

Если же, пользуясь формулой (16), вытекающей из классического подхода, оценить погрешность определения $v_{\text{вер}}$, исходя только из того, что указанную температуру T вполне можно измерить с погрешностью, например, $\Delta T = 10^{-3}$, то поскольку $\left(\frac{\Delta v}{v_{\text{вер}}}\right)_{\text{кл}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}$ получим чисто формально, что $v_{\text{вер}}$ можно в данном случае определить с погрешностью

$$\left(\frac{\Delta v}{v_{\text{вер}}}\right)_{\text{кл}} \approx 10^{-5}.$$

Это в 100 раз меньше, чем допускала первая оценка. Однако при этом $(\Delta q)_{\text{доп}} < \lambda_{\text{ср}}$ и возможность индивидуализации молекулы, а следовательно, классического приближения становится сомнительной.

Этим примером мы хотим лишь подчеркнуть, что при выборе метода оценки допустимых погрешностей и особенно при выяснении предела их уменьшения, необходимо в ряде случаев принимать во внимание особености квантовомеханического описания поведения системы.

Таким образом, в пределах допустимости классического приближения, свойства макросистемы и, следовательно, температуры и ее особенности можно выразить через чисто корпускулярные характеристики (координаты, скорости и др.) частиц (атомов, молекул), образующих систему. В этом случае, как известно, квантовым состояниям аналогичны ячейки в фазовом пространстве, образуемом совокупностью независимых координат q_i и соответствующих им импульсов p_j и служащих для описания состояния каждой индивидуальной частицы макросистемы [1, 6].

Роль числа f_c степеней свободы системы вместо набора квантовых чисел будет теперь выполнять число этих независимых координат. Так что, если каждая из N_0 молекул системы будет обладать i степенями свободы, то

$$f_c = N_0 i . \qquad (18)$$

После этого можно будет перевести сформулированное выше понятие температуры на язык классической физики (в классическом приближении).

Из выражения (2) следует, что

$$N_A(U_A) \sim (U_A - U_{A0})^{f_{cA}}$$

Поэтому параметр $\beta(U_a)$ для подсистемы A будет, согласно (8), качественно определяться выражением

$$\beta(U) = \frac{1}{N_A(U_A)} \frac{\partial N_A(U_A)}{\partial U_A} \sim \frac{f_{cA}}{(U_A - U_{A0})} .$$

Следовательно, в условиях равновесия, когда

$$U_a = U_{aм} \approx (U_a)_{ср} = \bar{U}_a ,$$

$$\beta_A \sim \frac{f_{cA}}{\bar{U}_A - U_{A0}} .$$

Если принять условие (9), то получим

$$kT_A = \frac{1}{\beta_A} \sim \frac{(\bar{U}_A - U_{A0})}{f_{cA}} = \Phi_A \sim \frac{(\bar{U}_A - U_{A0})}{f_{cA}} .$$

Вдали от основного состояния $U_a \gg U_{ao}$, и поэтому

$$\Phi_A = kT_A \sim \frac{\bar{U}_A}{f_{cA}} .$$

С учетом (18) найдем, что

$$\Phi_A = kT_A \sim \frac{\bar{U}_A}{f_{cA}} = \frac{\bar{U}_A}{N_{0A} i_A} = \frac{W_{c0A}}{i_A}$$

Таким образом, для любой макросистемы A, находящейся в состоянии теплового равновесия, оба параметра Φ_a и T_a, выражающие температуру, идентично характеризуют среднюю энергию $\overline{U}_a$ (рассматриваемую по отношению к энергии основного состояния U_{ao}), приходящуюся на одну степень свободы системы, и если последняя состоит из молекул, то — среднюю энергию $W_{сфA} = \frac{\overline{U}_A}{N_{сA}}$ приходящуюся на одну степень свободы молекулы (для $i_a = 1$).

В частности, если роль системы A выполняет любой газ, то рассматривая поступательное тепловое движение центра масс каждой молекулы газа, можно показать, что средняя кинетическая энергия движения центра масс молекулы будет равна

$$(W_{сфA})_{ц.м} = \frac{3}{2} k T_A .$$

В этом заключается физический смысл абсолютной температуры. В классическом представлении она, как видим, характеризует интенсивность ($\frac{\overline{U}_A}{i_{сA}}$) хаотического движения молекул.

Термодинамическая температура

Допущение тождественности (9) между параметрами $\Phi(U)$ и T, основанное на установлении идентичности их свойств при качественном анализе, находит достаточно строгое обоснование в феноменологической термодинамике. Если опираться на правдоподобные эмпирические факты, позволяющие признать существование температуры как характеристики «температурного состояния» макросистемы, и воспользоваться подходящими наблюдаемыми на практике термозависимыми свойствами надлежащих веществ в качестве термометрических, то количественно условную температуру можно измерить при помощи большого числа различных шкал. Такое определение зависит от рода термометрического вещества, является теоретически необоснованным и неправильным, поскольку не соответствует физическому смыслу температуры. Ввиду того, что в этом случае связь с температурой является условной и основана не на общем для всех веществ свойстве, а на характерном (специфическом) свойстве данного термометрического вещества, результат определения температуры, получившей название «эмпирическая температура (Θ)», оказывается неоднозначным. Такое положение не могло, естественно, удовлетворить температурную метрологию, ставящую во главу угла единство, правильность и точность измерения.

Второе начало термодинамики позволило Кельвину дать теоретически точное количественное определение температуры, названной поэтому «термодинамической температурой (Т)». Метрологическая важность такого способа количественного определения температуры заключается в его универсальности, т. е. в независимости значения термодинамической температуры от рода и свойств термометрического вещества, а также в его правильности, обеспечивающих, в принципе, однозначность, точность и единство измерения температуры.

Опираясь на цикл Карно для идеальной тепловой машины и первый и второй законы термодинамики, получим, что тепловой коэффициент машины (а также ее к.п.д.), т. е. параметр процесса

$$\varphi(\Theta_н, \Theta_х) = \frac{Q_н}{Q_х}$$

не зависит от рода рабочего тела и является функцией только эмпирических температур нагревателя $\Theta_н$ и холодильника $\Theta_х$, между которыми работает машина ($Q_н$ — тепло, отдаваемое в процессе нагревателем, а $Q_х$ — тепло, получаемое при этом холодильником). Следовательно, параметр φ выражает фундаментальное свойство процесса преобразования тепловой энергии в механическую и, являясь универсальной функцией температур $\Theta_н$ и $\Theta_х$, может служить, в принципе, наиболее совершенным термометрическим параметром.

Было доказано, что значение функции $\varphi(\Theta_н, \Theta_х)$ можно представить в виде отношения значений одной и той же также универсальной (инвариантной по отношению к роду и свойствам вещества рабочего тела) функции $\Psi(\Theta_н)$, $\Psi(\Theta_х)$ только от одного аргумента, т. е.

$$\varphi(\Theta_н, \Theta_х) = \frac{\psi(\Theta_н)}{\psi(\Theta_х)} = \frac{Q_н}{Q_х}.$$

Эти значения неизвестной функции $\Psi(\Theta)$ от эмпирической температуры Θ по предложению Кельвина было принято считать точными значениями термодинамической температуры, т. е. положить $\Psi(\Theta) = T$, и поэтому

$$\frac{Q_н}{Q_х} = \frac{T_н}{T_х}$$

Эта фундаментальная связь и служит теоретической основой строгого количественного определения универсальной термодинамической температуры.

В практическом отношении такое определение само по себе мало, что дает, так как реализовать цикл Карно и обеспечить измерение величин φ, $Q_н$, $Q_х$ с требуемой точностью пока не представляется возможным. Однако, из указанной связи вытекают следствия, открывающие путь к практическому нахождению термодинамических температур косвенным путем. Отметим только, что отсюда вытекает известная связь T с энтропией.

Для обратимого процесса $dS = dQ/T$, и поэтому первый закон термодинамики в случае равновесия может быть представлен в известном виде

$$TdS = dU + dA$$

С помощью этого соотношения можно связать с термодинамической температурой T ряд измеримых на практике параметров и, в том числе, $p - V$ — свойства газа.

В этом плане укажем на принципиально важную для термометрии возможность обоснования допущений (9) и (10).

Поскольку приведенная выше трактовка физического смысла температуры имеет общий характер, т. е. не зависит от степени сложности исследуемой макросистемы, то ограничимся рассмотрением сравнительно простой системы — идеального газа. Под этим будем подразумевать газ, для которого можно пренебречь потенциальной энергией взаимодействия между молекулами по сравнению с их кинетической энергией хаотического (теплового) движения. Тогда, в пределах указанной ранее строгости, $p - V$ свойства этого газа можно выразить через фундаментальный параметр $\Phi(U)$ или $\beta(U)$ как $p_{ср}V = N_0\Phi(U)$,

где $p_{ср}$ — среднее давление газа на стенки сосуда.

Если в машине Карно использовать в качестве рабочего тела идеальный газ и осуществить с ним цикл между термодинамическими температурами $T_н$ и $T_х$, то получим

$$\varphi(T_н, T_х) = \frac{Q_н}{Q_х} = \frac{T_н}{T_х} = \frac{\Phi_н}{\Phi_х} = \frac{(pV)_н}{(pV)_х}.$$

Отсюда следует равенство $\Phi = cT$, которое соответствующим выбором единиц можно привести к виду (9) и, вместе с тем, получить уравнение состояния для идеального газа

$$p_{ср}V = N_0kT. \qquad (11)$$

Из сказанного выше следует, во-первых, что значение термодинамической температуры T находится в полном соответствии с физическим смыслом самой температуры, и, таким образом, является наиболее теоретически обоснованным и правильным. Во-вторых, что $p - V$ свойства идеального газа могут быть использованы в качестве термометрических для определения значений этих температур. В-третьих, что помимо непосредственного термодинамического пути (через определение φ и Q), существует прямой статистический путь количественного определения термодинамических температур, если окажется возможным измерять или определять такие параметры, как число доступных микросостояний или среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы системы или на одну степень свободы молекулы в состоянии теплового равновесия макросистемы.

Практическое решение вопроса в этом направлении пока не найдено и для определения термодинамических температур в настоящее время применяется косвенный путь на основе построения термодинамической шкалы температур * — шкалы Кельвина (ТШТ) различными методами и, в первую очередь, газотермометрическим методом.

Следует подчеркнуть, что выбор для функции $\Psi(\Theta)$ линейной зависимости от T был произвольным и пока представляется более или менее удачным. Насколько это верно, покажут дальнейшие исследования. Надо иметь в виду, что форма связи $\Psi(\Theta)$ с T могла быть выбрана различной (например, с T идентифицировалась бы не функция $\Phi(U)$, а параметр $\beta(U) = 1/\Phi(U)$), и мы имели бы разные варианты определения температуры и термодинамических шкал.

Газотермометрический метод построения ТШТ

В основе этого метода лежит уравнение (18) для идеального газа и постулат о том, что для реального газа

$$\lim_{p \to 0} pV = N_0 kT \tag{20}$$

Этот постулат является обобщением результатов многочисленных экспериментальных исследований; он получил обоснование в статистической механике, где доказывается, что при достаточно высоких температурах (при достаточном удалении от точки превращения газа в жидкость) и при достаточно малых плотностях, поведение реального газа можно описать с достаточной точностью уравнением в вириальной форме

$$pV = N_0 kTZ \; . \tag{21}$$

---

* Температурная шкала — это последовательность (монотонная) численных значений температур различных термодинамических состояний макросистемы, подчиненная определенному закону построения, позволяющему установить связь между значениями температуры и соответствующего термометрического параметра.

Здесь T — абсолютная термодинамическая температура; Z — коэффициент сжимаемости газа, который учитывает отклонение свойств газа от идеального и при указанных условиях может быть представлен в виде достаточно быстро сходящегося ряда по плотностям или давлениям

$$Z = 1 + \frac{B(T)}{V_\mu} + \frac{C(T)}{V_\mu^2} + \ldots = 1 + B^*(T)p + C^*(T)p^2 + \ldots \qquad (22)$$

Коэффициенты $B(T)$, $C(T)$... называются вириальными, зависят от природы газа и только от его температуры, а коэффициенты $B^*(T)$, $C^*(T)$... связаны с вириальными известными соотношениями.

Из последнего ряда для Z особенно очевидна связь уравнения (21) с упомянутым постулатом и его правдоподобность.

Если располагать газовым термометром и провести с ним измерения при постоянном объеме и массе термометрического газа, то, опираясь на известную опорную температуру T_0 (температура стандартного температурного состояния, которому приписывается определенное численное значение температуры), можно из уравнений (20) или (21) определить любую, доступную для газа, термодинамическую температуру T. Для этого достаточно измерить давление газа p_0 и p_x при температурах T_0 и T_x и рассчитать искомую температуру по формуле

$$T_x = T_0 \frac{p_x Z_0}{p_0 Z_x}. \qquad (23)$$

Здесь Z_0 и Z_x — соответствующие значения Z, которые могут быть определены из независимых измерений с газовым термометром или найдены полуэмпирическим расчетным путем. Из уравнения (20) видно, что для нахождения T_x можно применить метод приведения к ТШТ показаний газового термометра, работающего с газом в условиях, близких к идеальному состоянию, путем экстраполяции этих показаний к нулевому давлению.

При этом шкала Кельвина реализуется в том случае, если за начало отсчета температур берется практически не реализуемое состояние — абсолютный нуль температуры, для которой принимается значение $T_a = 0$, а в качестве реализуемого на практике стандартного опорного температурного состояния берется ТТВ — тройная точка воды с приписанным значением для ее температуры $T_0 = 273{,}16$ (точно).

Тем самым считается, что за единицу температуры по шкале Кельвина, т. е. за кельвин (К) берется единичный температурный интервал, равный 1/273,16 части интервала между абсолютным нулем и ТТВ. В соответствии с этим принята запись, например, $T_a = 0$К, $T_0 = 273{,}16$ К и т. д.

Установлено, что метод построения ТШТ, основанный на применении газового термометра в настоящее время является наиболее совершенным как по точности определения термодинамических температур (10^{-3}—10^{-4} К в лучшем случае), так и по ширине диапазона (по крайней мере, от 4 до 1400 К).

Во ВНИИМ наряду с разработкой теории высокоточного определения термодинамических температур и газового термометра были созданы два газотермометрических метода (МОР и МДР) [7, 8], была разработана и введена в действие соответствующая аппаратура для газового термометра, состоящего из термометрического и манометрического комплексов, и на этой основе были выполнены исследования по ТШТ в интервале от 90 до 1338 К.

Результаты исследований получили международное признание и были использованы международными организациями по температурной метрологии при создании МПТШ-68.

В 1976 г. газовый термометр № 3М ВНИИМ впервые в международной метрологической практике был возведен в ранг эталона и занял в поверочной схеме место эталона-свидетеля [9].

Однако, в метрологии применение газового термометра этим не исчерпывается. Анализ погрешностей измерения и возможности усовершенствования методики и аппаратуры газового термометра показывает, что в недалеком будущем его можно использовать в самом верхнем звене поверочной схемы при построении национальной термодинамической шкалы взамен все более исчерпывающей себя практической шкалы (МПТШ-68) [10, 11]. В пользу этого говорит прежде всего тот факт, что основные задачи термометрии могут решаться наилучшим образом лишь путем определения термодинамических температур, а оно наиболее точно осуществляется с помощью газового термометра. Следовательно, газовый термометр должен являться исходным прибором для реализации наивысшей точности измерения температуры по ТШТ. Вместе с тем, поскольку МПТШ-68 служит для практического внедрения ТШТ и является по сути лишь промежуточной ступенью между газовым термометром и средствами измерения температуры, применяемыми в повседневной практике, и поскольку с уточнением результатов измерения с газовым термометром МПТШ-68 должна постоянно пересматриваться и при том довольно часто, то целесообразно устранить существующую двухступенность в передаче размера Кельвина, минуя этап с применением МПТШ-68.

Наряду с этим, с газовым термометром можно проводить широкие термодинамические исследования по уточнению важных теплофизических параметров и констант (коэффициентов сжимаемости, газовых постоянных и др.). В настоящее время ведутся подготовительные работы для решения этих проблем путем усовершенствования теории, методики и аппаратуры.

Начаты разработка более совершенных узлов и аппаратуры и исследование возможности автоматизации и использования лазерной и электронно-вычислительной техники в метрологических экспериментах с газовым термометром.

Таким образом, перед газовой термометрией ВНИИМ поставлена новая задача повышения точности определения термодинамической температуры (СКО 10^{-5}—10^{-6}) в широком диапазоне (90—2000 К) и точности передачи размера кельвина по ступеням поверочной схемы. Эти задачи вырастают в проблему, особенности которой можно сформулировать, воспользовавшись приведенной информацией и опираясь на результаты данного анализа.

Пути и перспективы повышения точности определения температуры и передачи размера кельвина

Методы измерения температуры T могут быть основаны, в принципе, на любой теоретически достаточно строго выведенной связи между хорошо измеряемыми свойствами и искомыми параметрами $\beta(U)$, $\Phi(U)$ или T. Например, на основе связи T с э.д.с. шума, с частотой ядерно-квадрупольного резонанса и др. Однако лучшим (по точности, широте диапазона) в настоящее время является, как было сказано, газотермометрический метод определения термодинамических температур, основанный на применении газового термометра, измерении температуры по давлению газа и учете его неидеальности.

Поскольку экспериментально проще и точнее сравнивать две абсолютные температуры, чем непосредственно измерять указанные параметры, то проблема решается с помощью построения шкалы Кельвина.

Для этого построения требуется: располагать достаточно точным, теоретически строго обоснованным, уравнением связи (указанные выше фундаментальные связи, основанные на понимании физического смысла температуры и вытекающие отсюда уравнения состояния газа это допускают); выбрать начало отсчета температур (абсолютный нуль температуры наиболее пригоден для этой цели, так как он хорошо определен теоретически, не требует практической реализации соответствующего состояния и поэтому не вносит погрешности); выбрать единицу измерения температуры (в метрологическом отношении наилучшим является выбор в качестве единицы кельвина). Это достигается путем фиксации — 273,16 точно — температурного интервала между абсолютным нулем температуры и одной практически реализуемой опорной точкой — ТТВ. Она физически воспроизводит температурное состояние, являющееся основой меры температуры); создать меру (сосуды с ТТВ достаточно хорошо выполняют функции меры, так как обеспечивают воспроизводимость $1-2\cdot10^{-4}$ K); создать метод и соответствующую аппаратуру (метод двух резервуаров и газовый термометр № 3, созданные во ВНИИМ, а также приборы, созданные во ВНИИФТРИ и в ряде зарубежных стран, позволяют решить проблему при дальнейшем их усовершенствовании); разработать технику измерения, обеспечивающую требуемую точность определения температуры и методику передачи размера кельвина по ступеням поверочной схемы (эта задача наилучшим образом может быть решена путем внедрения шкалы Кельвина непосредственно в повседневную практику, минуя двухступенность, создаваемую МПТШ, а также опираясь на широкое использование эталонных функций газового термометра, занимающего ведущее положение в поверочной схеме).

Вопрос о воспроизведении и передаче размера кельвина в теоретическом плане связан с еще одной особенностью температуры, на которой следует остановиться. Согласно рассмотренной концепции, температура, в отличие от многих других физических величин, не обладает свойством аддитивности. Это объясняется, по-видимому, не только ее физической сущностью, но и принятыми методами ее количественного определения.

Вопрос неаддитивности температуры требует дальнейшего исследования. Однако, хотелось бы отметить, что его нельзя сводить к использованию свойства интенсивности температуры. Чтобы говорить об аддитивности или неаддитивности той или иной физической величины, необходимо прежде всего договориться о способе описания этого свойства, т. е. о том, что следует (что мы хотим) понимать под сложением температуры. Так, известно, что силы подчиняются закону геометрического сложения, а длины складываются алгебраически. В основе этого заключения лежало изучение свойств полей и метрики пространства (в метрологическом отношении они будут еще уточняться и совершенствоваться), а также условность в способе описания взаимодействия объектов.

Например, операцию сложения температуры можно определить в таком виде. Пусть имеем две макросистемы A и B (термостат и термометр с температурами T_a и $T_в$. Приведем A и B в тепловой контакт и образуем из них изолированную систему C. При достижении теплового равновесия в системе C установится общая температура T_c. Эту процедуру условимся считать сложением температур T_a и $T_в$, а температуру T суммой этих температур.

Из приведенных данных ясно, что T_c не будет численно определяться равенством

$$T_c = T_A + T_B \ .$$

Применительно к идеальному газу и пренебрегая различием теплоемкостей A и B, в первом приближении получим

$$T_c = \frac{N_A}{N_C} T_A + \frac{N_B}{N_C} T_B ,$$

где N_a, $N_в$ — числа молекул в A и B, $N_c = N_a + N_в$. Следовательно, в этом случае результирующая температура T_c определяется как некоторое среднее взвешенное из T_a и $T_в$.

Воспользуемся газовым термометром для количественного определения температуры, учитывая связь ее с давлением газа согласно формуле (23) и то, что для идеального газа $Z_j = 1$, найдем, тогда

$$T_C = T_0 \left(\frac{N_A}{N_C} \frac{p_A}{p_{A0}} + \frac{N_B}{N_C} \frac{p_B}{p_{B0}} \right) \qquad (24)$$

где T_0 — численное значение опорной температуры (например ТТВ); P_a, $P_в$, P_{a0}, $P_{в0}$ — значение давлений газа, которые были найдены с помощью газового термометра при сравнении температур T_a и $T_в$ с T_0.

Вот так выглядела бы принятая процедура сложения температур при газотермометрическом методе их определения.

Эту процедуру мы рассмотрели потому, что она позволяет раскрыть смысл операции выражения температуры в принятых единицах (в кельвинах) и сущность передачи размера единицы — кельвина. Из (24) видно, что для выражения T_c в кельвинах достаточно приписать абсолютной температуре T_0 численное значение 273,16. Следовательно, нельзя подобную операцию трактовать в понятиях, пригодных для аддитивных величин, и механически (ради унификации языка) переносить их на температуру. Для последней несправедлива следующая формулировка: «температура равна численному значению, полученному при выражении ее в определенных единицах, умноженному на эту единицу». Численное значение температуры не образуется в результате алгебраического (или векторного) сложения «единичных» значений температуры. В основе такого образования лежит следующая операция. С помощью меры (ТТВ) воспроизводят определенное температурное состояние, описываемое параметром T_0 (температурой); приписывают температуре T_0 некоторое опорное численное значение; разрабатывают процедуру (метод), позволяющую подобно (24) выразить искомые температуры всех других температурных состояний через это опорное численное значение для T_0, и тем самым находят для них количественную оценку. В этом и заключается представление (выражение) температуры в кельвинах. Оно, очевидно, не идентично операции образования численного значения для аддитивных величин, когда имеет смысл говорить о сложении «единиц» в обычном его понимании. Из сказанного вытекает, что применительно к температуре иной смысл заключен в приставке символа K к значению температуры T и особенно к опорному значению $T_0=273,16$. Ведь T_0 физически и процедурно вовсе не образуется из единичных температурных интервалов, именуемых кельвином и тем более путем обычного сложения.

Таким образом, **под температурой, выраженной в кельвинах, следует понимать то ее численное значение T, которое получается на основе процедуры приписывания опорной температуре значения 273,16 (точно).** При этом символ К, поставленный рядом с T, нужен лишь для того, чтобы обозначить отличительную черту указанной процедуры. В соответствии с этим, **градус температуры, и в том числе, кельвин, следует трактовать как такой эффективный (средний) единичный температурный интервал, пользуясь которым можно было бы получить (образовать) действительное значение температуры в предположении ее аддитивности.** В этом смысле, ради краткости, можно считать, что кельвин есть **в среднем** 1/273,16 часть температуры ТТВ. Представляется, что таким путем существующие формулировки освобождаются от провоцирования представления об аддитивности температуры.

Говоря о метрологическом значении выбора опорной температуры (ТТВ) и соответствующей меры, следует подчеркнуть, что выбор меры (сосудов с ТТВ) и фиксация размера воспроизводимой с ее помощью физической величины (температуры) оказывает прямое влияние на фиксацию значений фундаментальных констант (постоянной Больцмана, универсальной газовой постоянной и всех связанных с ними констант). Поскольку определение и уточнение этих значений возможно средствами газовой термометрии, исследование этих возможностей входит в число задач рассматриваемой проблемы.

Некоторые вопросы, несмотря на их дискуссионность, подняты здесь для того, чтобы подчеркнуть их метрологическую значимость, заострить на них внимание метрологов и указать на их органическую связь с этой проблемой.

Трудности, возникающие при решении проблемы, обусловлены, наряду с высокими требованиями к точности, правильности, единству измерения температуры, взаимной противоречивостью возникающих методических и конструктивных требований, порождающей и другую сложность. Она состоит в необходимости поиска ряда компромиссных путей, отвечающих максимуму оптимальности (и оптимистичности) с очень высокой точностью.

Из анализа сущности смысла и особенностей температуры вытекает, как уже упоминалось, в первую очередь, вывод: температура имеет физический смысл только для макросистем ($f_c \approx 10^{24}$); она приобретает определенность в своем численном значении только в условиях теплового равновесия системы; чем меньше число степеней свободы f_c, чем ближе система к своему основному состоянию, тем меньше скорость установления равновесия и тем больше возможная погрешность определения температуры и сравнения температур с опорной температурой. Следовательно, тем ниже точность передачи размера кельвина в процессе этого сравнения, а также ниже степень его воспроизведения.

Таким образом, макроскопичность и равновесность системы, состоящей из термостата в контакте с термометром, — одна из главных задач термометрического процесса. Но критерием достижения равновесия является температура, ее равенство во всех частях сложной системы. Поэтому, чтобы установить степень реализации равновесия, надо как можно точнее знать температуру, приобретающую, однако, определенное значение только при равновесии. Выход из этого замкнутого круга приходится искать в том, что равновесие характеризуется также неизменностью во времени значений и других параметров (например, давления), определяемых из макроизмерений. Этим собственно и открывается путь для косвенного определения температуры (в газовом термометре по давлению). Вместе с тем, чем макроскопичнее система (чем больше f_c) и чем дальше ее состояние от основного ($U_c \ll U_0$), тем меньше время релаксации, т. е. тем выше скорость достижения равновесия и тем оно устойчивее, более вероятнее. Отсюда второй выход из данной ситуации лежит в достаточном увеличении размеров системы, в которой и по которой определяется температура (термостата и термометра в отдельности). Однако, это наталкивается на последующие противоречия. Чем больше объем рабочего пространства термостата (его рабочего тела), тем сложнее достигнуть в нем необходимой однородности и стабильности температурного поля. В этом смысле требуется уменьшить как рабочее пространство, так и размеры термометра (его чувствительного элемента). Следовательно, и в этом вопросе приходится искать компромисса и решать его на высоком уровне оптимальности. Подходящее решение достигается с помощью газового термометра. При сравнительно небольшом объеме чувствительного элемента (рабочего резервуара с термометрическим газом), в области даже умеренных малых давлений, количество молекул, образующих газ (и его макроскопичность), достаточно велико. Вместе с возможностью молекул газа двигаться поступательно это делает число степеней свободы у газа много большим, чем у конденсированных систем. Но и здесь требуется искать оптимальности, поскольку, чем больше измерительная система (термометр) и ее теплоемкость, тем большее количество тепловой энергии она отберет у исследуемого объекта и тем сильнее будет искажено его температурное состояние. Решение этого противоречия лежит в применении для построения шкалы Кельвина особых объектов измерения, работающих на основе фазовых равновесий или переходов в рабочей системе (теле). Такие состояния принадлежат, как известно, к числу саморегулирующихся естественным путем (в силу их природы) и поэтому способных сохранять свое температурное состояние при изменении энергии. Следовательно, точные измерения температуры связаны с исследованием степени стабильности температуры при фазовых переходах и подводе энергии, с изучением их свойства, а также с поиском новых фазовых переходов для широкого диапазона температур, удовлетворяющих не только метрологическим требованиям, но и отличающихся сравнительной простотой, удобством применения рабочих тел, экономичностью. Указанная задача решается с помощью создания постоянных реперных точек, работающих на основе фазовых равновесий и переходов в особо чистых (99.9999% по массе) веществах. В связи с этим возникает сложная задача по сверхвысокой очистке этих веществ от примесей, по определению возможности стабилизации их состава, его контролю и поддержанию при наличии соответствующей конструкции узлов термостатной аппаратуры.

Создание надлежащих термостатов вырастает в проблему, отдельную от создания аппаратуры газового термометра. Сложность ее решения усиливается необходимостью создания также управляемых извне термостатов, в рабочем пространстве которых стационарные условия и температуры поддерживаются и регулируются в определенном диапазоне путем варьирования количества подаваемой к ним извне энергии с помощью средств автоматизации. Большие трудности в реализации этой задачи связаны с высокими требованиями к средствам регулирования и управления. Необходимо получить большую чувствительность к изменению температуры (10^{-4} К), высокую точность ее поддержания на различных заданных уровнях (10^{-4} К), достаточно высокую скорость выхода на заданное состояние, большую плавкость его изменения и достаточно широкий диапазон создаваемых рабочих температур.

С помощью комплекса указанных термостатов градуировка по газовому термометру и по шкале Кельвина вторичных приборов и передача им, а также по всем ступеням поверочной схемы, размера кельвина может быть осуществлена наиболее точно (в силу детальности градуировки, высокой воспроизводимости показаний вторичных приборов, отличающихся меньшей, чем у газового термометра, сложностью и громоздкостью конструкции).

Важное место в теоретических и экспериментальных исследованиях занимает анализ и учет влияния источников погрешностей газотермометрического метода и аппаратуры на точность реализации проблемы. Ограничимся краткой характеристикой лишь основных источников погрешностей, учет и уменьшение влияния которых еще далеко не исчерпаны и потому служат предметом исследования. Сюда относятся эффекты сорбции, методика расчета конструкции термостатов с наперед заданными метрологическими параметрами и др.

К основным источникам погрешностей газовой термометрии относится: неидельаность термометрического газа, его вредный объем и сорбция, а также тепловое расширение рабочего резервуара. Особое и существенное значение имеют погрешности, связанные с работой термостатных устройств, предназначенных для реализации искомых температур. В связи с этим требуется исследовать вопросы о тепловой инерции систем, свойствах и путях осуществления фазовых переходов, поддержания чистоты реперных веществ, реализации теплового равновесия, контроля степени его устойчивости и оценки времени релаксации.

С повышением точности растет, естественно, число источников погрешностей, подлежащих учету. На уровне требований к суммарной погрешности измерения температуры порядка 10^{-3} К приходится учитывать такие сравнительно малые эффекты, как влияние гравитационного поля на результат измерения давления, влияние небольших примесей к газу на его неидеальность и др.

Для учета влияния выявленных источников систематических погрешностей, а в ряде случаев и для их исключения, были выведены формулы соответствующих поправок.

Наряду с этим теоретические разработки привели к созданию прецизионных измерительных комплексов газового термометра, к разработке для него принципиально новой схемы и принципа действия, а также к созданию термостатных устройств для реализации фиксированных реперных точек в диапазоне 90—1338 К. Наиболее слабым звеном остается пока разработка методики расчета конструкции термостатных устройств, воспроизводящих сменные температуры и установление возможности создавать термостаты с наперед заданными метрологическими свойствами. В этом направлении работа только началась.

Таким образом, проблема измерения температуры и передачи размера кельвина в отличие от аналогичных задач измерения других физических величин, усложняется необходимостью решать одновременно (параллельно) с учетом противоречивых требований две сложные задачи; создавать не только средства измерения (теорию, метод, условия, аппаратуру термометра, технику измерения), но и сам объект измерения (находить и воспроизводить с необходимой точностью стабильные температурные состояния, создавая для этого различные термостатные устройства).

Успешное решение этой проблемы позволит построить общесоюзную поверочную схему для средств измерения температуры на принципиально новой основе во главе с усовершенствованным газовым термометром, позволяющей в повседневной практике определять действительную температуру по шкале Кельвина и исключить указанную выше двухступенность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гиббс Дж. В.** Основные принципы статистической механики. ОГИЗ-Гостехиздат, 1946.

2. **Фаулер Р., Гуггенгейм Э.** Статистическая термодинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

3. **Райф Ф.** Статистическая физика, М., Наука, 1972.

4. **Френкель Я. И.** Статистическая физика, М.—Л., Изд. АН СССР, 1948.

5. **Терлецкий Я. П.** Статистическая физика, М., Высшая школа, 1966.

6. **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

7. **Израилов К. С., Киренков И. И., Дийков У. В. и др.** Новое определение термодинамической температуры фазового равновесия в точке золота методом прямого погружения резервуара газового термометра. — Измерительная техника, 1967, № 1.

8. **Киренков И. И., Израилов К. С., Дийков У. В.** Метрологические особенности газового термометра, работающего по методу двух резервуаров. — Труды метрологических институтов СССР, М.—Л., Энергия, 1975, вып. 181 (241).

9. **Израилов К. С.** Усовершенствованный газовый термометр. В сб. Метрология и точные измерения, 1976. вып. 11 (110).

10. **Олейник Б. Н., Кандыба В. В.** Международное единство в области температурных измерений. — Измерительная техника, 1975, № 4.

11. **Олейник Б. Н.** Стандартизация в термометрии. — Измерительная техника, 1975, № 9.

Поступила в редакцию
24.4.1978 г.

УДК 53.081

Б. И. ПИЛИПЧУК

ЕДИНИЦЫ ПЛОСКОГО И ТЕЛЕСНОГО УГЛА

В литературе нет единого мнения о месте единиц плоского и телесного угла. В Международной системе единиц они выделены в отдельную группу дополнительных единиц, некоторые авторы считают их производными единицами и только немногие решаются отнести их к основным единицам. Сокращенное обозначение единиц угла записывается при отдельных числовых значениях, но игнорируется в выражениях, куда входят углы или зависящие от них величины. Обсудим возможности рассмотрения плоских и телесных углов как размерных величин.

Измерение плоских углов основано на теореме о прямой пропорциональности между центральными углами в окружности и соответствующими им длинами дуг:

$$\frac{\varphi}{[\varphi]} = \frac{l}{l_1}\,, \qquad (1)$$

где φ и $[\varphi]$ — сравниваемые углы, второй из которых условно выбран единицей; l и l_1 — дуги окружности, вырезаемые этими углами.

На основании пропорции (1) получаем выражение для угла

$$\varphi = \left(\frac{l}{l_1}\right)[\varphi]\,, \qquad (2)$$

Любая величина может быть представлена в виде произведения ее числового значения на принятую единицу. Формула (2) показывает, что числовое значение угла равно

$$\{\varphi\} = \frac{l}{l_1}\,. \qquad (3)$$

Многие авторы, игнорируя в правой части равенства (2) единицу угла (т. е. произвольно приравнивая ее отвлеченной единице — 1), приходят к заключению, что угол является безразмерной величиной и измеряется в отвлеченных относительных единицах.

Равенство (1) безразмерных отношений — двух углов слева и двух длин справа — не позволяет судить о размерности величин в какой-либо части по размерности величин в другой части. Формула (2), в которой обе части имеют размерность плоского угла, является правильным следствием исходной формулы (1). В дальнейшем изложении символы углов будут обозначать исключительно размерные углы. Интересно указать на разногласия в истолковании подобных пропорций. Если в газовой термометрии из равенства отношения абсолютных температур отношению давлений не делают заключения о безразмерности температуры, то в сферической астрономии, исходя из пропорциональности углов времени, измеряют углы прямо в единицах времени.

Некоторые авторы в защиту безразмерности угла ссылаются на одинаковость единиц угла во всех без исключения системах. Несостоятельность такого довода нетрудно заметить, обратив внимание на совпадение единиц времени также во всех системах, которое не дало повода для отнесения времени к безразмерным величинам. Размерность связана исключительно с потенциальной возможностью замены единицы и вовсе не обусловлена практическим применением различных единиц.

В силу независимости единицы угла от выбора основных единиц любой системы она сама должна быть отнесена к разряду основных единиц.

Естественной легко реализуемой единицей плоского угла является оборот или полный плоский угол Ф. На практике всегда применяют какую-либо меньшую единицу — $1/n$-ю долю оборота (знаменатель дроби — отвлеченное число!). При таком выборе будем иметь следующие соотношения:

длина дуги, соответствующей единице угла

$$l_1 = \frac{2\pi r}{n},$$

полный угол

$$\Phi = n[\varphi]. \qquad (4)$$

угол, опирающийся на дугу, равную радиусу (т. е. радиан, выраженный в принятой единице)

$$\varphi_r = \frac{n}{2\pi}[\varphi]. \qquad (5)$$

Самые простые формулы получим, полагая $n=2\pi$, т. е. измеряя углы в радианах

$$l_1=r,\quad \Phi=2\pi\ рад,\quad \varphi_r=1\ рад,\quad \varphi=\left(\frac{l}{r}\right)рад.$$

Радиан играет большую роль при введении размерных углов, так как геометрия окружности основана на существовании двух характерных констант — безразмерной π и размерной φ_r.

Во все формулы анализа и механики входят не углы, а только их числовые значения в радианах, т. е. отношения углов к радиану

$$\{\varphi\}_{рад}=\frac{\varphi}{\varphi_r} \qquad (6)^*$$

Полный учет этого обстоятельства гарантирует отсутствие каких-либо нарушений размерной однородности формул, которого опасаются в связи с введением размерных углов.

Формула для длины дуги l, стягивающей центральный угол φ, должна быть записана следующим образом:

$$l=r\{\varphi\}_{рад}, \qquad (7)$$

или

$$l=\left(\frac{r}{\varphi_r}\right)\varphi. \qquad (8)$$

Размерный множитель в круглых скобках в правой части формулы (8) имеет простой геометрический смысл, будучи связан с кривизной окружности.

Согласно определению, кривизна кривой есть предел отношения угла между касательными на концах дуги к длине дуги при неограниченном сближении ее концов. Она должна иметь размерность «угла, деленного на длину», а не размерность обратной длины, как принято считать в курсах математического анализа. Соответственно, величина, обратная кривизне, должна иметь размерность «длины, деленной на угол», а не размерность просто длины. Чтобы избежать возможных недоразумений из-за укоренившихся представлений, назовем **обкривизной** величину, обратную кривизне при учете размерности угла. Обкривизна окружности постоянна во всех ее точках и потому может быть выражена отношением любой конечной дуги к соответствующему углу

---

* Некоторые авторы вводят для числового значения угла в радианах особое название «аналитический угол», которое представляется нам излишним и приводящим к путанице понятий.

$$\rho = \frac{l_1}{[\varphi]} = \frac{2\pi r}{\Phi} = \frac{r}{\varphi_r}. \qquad (9)$$

При измерении углов в радианах числовые значения обкривизны и радиуса соприкасающейся окружности будут совпадать, хотя сами величины будут выражены в разных единицах (например, в м/рад, м и т. д.).

После введения понятия обкривизны формула (8) примет вид

$$l = \rho\varphi. \qquad (10)$$

т. е. длина дуги окружности равна произведению обкривизны на соответствующий центральный угол. Формула (10) справедлива при любом выборе единиц длины и угла, тогда как обычно применяемая формула (7) требует выражения углов только в радианах.

Обкривизна нашла самое широкое применение в практике морской и воздушной навигации. Как известно, одной дуговой минуте большого круга Земли соответствует расстояние 1,852 км. Это означает фактически, что обкривизна Земли равна 1,852 км/′ = 111,1 км/град. При создании метрической системы единицы длины и угла выбирались так, чтобы обкривизна Земли выразилась круглым числом 100 км/град = 1 км/сантиград *.

Тригонометрические величины, определяемые как отношения отрезков в окружности, являются безразмерными. Каждая безразмерная величина может быть функцией только безразмерных аргументов — безразмерных комбинаций размерных величин. Для тригонометрических величин таким безразмерным аргументом служит числовое значение угла в радианах, т. е. отношение этого угла к радиану, выраженному в тех же единицах, что и угол. Рассматривая, например, знак синуса как оператор функции, заданной разложением в ряд, нельзя, строго говоря, писать $\sin \varphi^\circ$, следует писать $\sin(\varphi/57{,}3^\circ)$ и т. д. То же самое справедливо для всех трансцендентных функций, аргументами которых служат углы.

В математическом анализе важную роль играет рассмотрение отношения хорды к стягиваемой ею дуге. Учитывая ранее изложенное, нетрудно показать, что значение этого отношения не зависит от применяемых единиц угла

$$\frac{2r\sin(\varphi/\varphi_r)}{2\rho\varphi} = \frac{r\sin(\varphi/\varphi_r)}{(r/\varphi_r)\varphi} = \frac{\sin(\varphi/\varphi_r)}{\varphi/\varphi_r} = \frac{\sin\{\varphi\}_{рад}}{\{\varphi\}_{рад}}$$

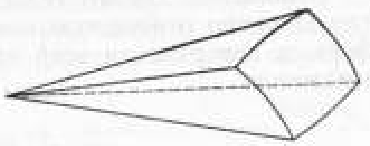
* Метрический градус (град) равен 0,01 прямого угла, метрическая минута составляет 0,01 град.

Телесные углы прямо пропорциональны площадям участков, выраженных ими на сфере

$$\frac{\omega}{[\omega]} = \frac{s}{s_1}, \qquad (11)$$

где ω и $[\omega]$ — сравниваемые телесные углы, второй из которых условно выбран единицей; s и s_1 — площади, вырезаемые на сфере этими углами. Пропорция (11) не дает оснований считать телесные углы безразмерными величинами, так же, как равенство (1) не позволяет считать безразмерными плоские углы.

Единицу телесного угла легко поставить в зависимость от единицы плоского угла, если принять единицей телесного угла элементарный телесный угол, заключенный между гранями правильной четырехугольной пирамиды, соседние ребра которой образуют между собой достаточно малый плоский угол (см. рисунок). Площадь участка, вырезаемого пирамидой на сфере, прямо пропорциональна квадрату плоского угла. При изменении единицы плоского угла в k раз единица телесного угла изменится в k^2 раз. Выбранная нами единица телесного угла является, таким образом, производной единицей с размерностью, равной квадрату размерности плоского угла. Такое заключение само по себе не ново, так как в астрономии издавна пользуются квадратными градусами. Удивительно, что об этом забыли при установлении Международной системы единиц.



Единица телесного угла

Описаный способ установления единицы телесного угла требует введения поправки из-за различия площадей плоского и сферического основания пирамиды. Погрешность, обусловленная этой причиной, при определении квадратного градуса составляет около 0.02%. Строгое вычисление можно произвести интегрированием по поверхности сферы.

Элемент поверхности сферы равен

$$ds = \rho^2 \sin\left(\frac{\theta}{\varphi_r}\right) d\varphi\, d\theta,$$

где ρ — обкривизна большого круга; θ — полярный угол; Ψ — азимут. Приведенная формула отличается от обычной тем, что в ней учтено основное соотношение (10), а углы и их дифференциалы считаются размерными величинами. Мерой телесного угла, опирающегося на элемент ds, служит отношение

$$d\omega = \frac{ds}{\rho^2} = \sin\left(\frac{\theta}{\varphi_r}\right) d\varphi\, d\theta \tag{12}$$

с размерностью квадрата плоского угла.

Найдем значение полного телесного угла, интегрируя выражение (12) элемента телесного угла по полярному углу в пределах от 0 до $\pi\varphi_r$ и по азимуту — от 0 до $2\pi\varphi_r$

$$\Omega = \int_0^{2\pi\varphi_r} d\varphi \int_0^{\pi\varphi_r} \sin\left(\frac{\theta}{\varphi_r}\right) d\theta = 2\pi\varphi_r \int_0^{\pi\varphi_r} \sin\left(\frac{\theta}{\varphi_r}\right) d\theta = 2\pi\varphi_r^2 \int_0^{\pi\varphi_r} \sin\left(\frac{\theta}{\varphi_r}\right) d\left(\frac{\theta}{\varphi_r}\right) = 4\pi\varphi_r^2. \tag{13}$$

Интегрирование по размерному азимуту не представляет никаких затруднений, при интегрировании по размерному полярному углу необходимо умножить интеграл на φ_r, одновременно разделив дифференциал под интегралом на φ_r, чтобы иметь право применить обычную формулу интегрирования синуса по числовому значению угла в радианах.

Отношение любого телесного угла ω к полному телесному углу Ω равно отношению поверхности s, вырезаемой углом на сфере, к поверхности всей сферы, поэтому будем иметь общее выражение

$$\omega = \frac{s}{4\pi r^2}\,\Omega = \frac{s}{r^2}\varphi_r^2. \tag{14}$$

Если единицей плоского угла будет служить n-я часть оборота, то с учетом (5) найдем

$$\omega = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 \frac{s}{r^2} [\varphi]^2, \tag{15}$$

$$\Omega = \frac{n^2}{\pi} [\varphi]^2. \tag{16}$$

Наиболее простые формулы получим, полагая $n = 2\pi$, т. е. измеряя плоские углы в радианах

$$\omega = \frac{s}{r^2}\ \text{рад}^2, \tag{17}$$

$$\Omega = 4\pi\ \text{рад}^2 \tag{18}$$

Квадратный радиан принято называть стерадианом (ср.). Стерадиан и радиан являются, таким образом, согласованными единицами.

Взаимосвязь, существующая между единицами плоского и телесного угла, делает несостоятельными попытки «рационализации» этих единиц при независимом произвольном назначении их размера. Если единицей телесного угла выбрать $1/m$ долю полного телесного угла, т. е. если положить $\Omega = m[\omega] = m[\varphi]^2$, то, как следует из формулы (13), согласованная единица плоского угла выразится через радиан следующим образом:

$$[\varphi] = \varphi_r \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \qquad (19)$$

Валлот (J. Wallot, 1926 г.) считал рациональными единицами оборот и полный телесный угол ($m=1$), К. П. Широков (1972 г.) в качестве рациональных единиц рассматривал квадрант (прямой угол) и стероктант (1/8 долю полного телесного угла, когда $m=8$). Установление единицы телесного угла вне связи с выбором единицы плоского угла приводило к неявному введению второй единицы плоского угла, равной у Валлота 203°06′, у К. П. Широкова — 71°48′.

Размерности всех геометрических величин могут быть выражены в системы «длина, угол» — Lα. В табл. 1 приведены размерности геометрических величин, зависящих от плоского угла.

Таблица 1

Величина и ее обозначение	Размерность величины	Величина и ее обозначение	Размерность величины
Плоский угол, φ	α	Кручение, τ	αL^{-1}
Телесный угол, ω	α^2	Средняя кривизна поверхности, $\varkappa$	αL^{-1}
Кривизна, $\varkappa$	αL^{-1}	Гауссова кривизна поверхности, K	$\alpha^2 L^{-2}$
Обкривизна, ρ	$\alpha^{-1} L$		

Учет размерности плоского угла влечет за собой видоизменения формул механики, относящихся к вращательному движению. В табл. 2 сопоставлены обычные и «размерные» формулы для пути, линейной скорости и тангенциального ускорения.

Таблица 2

Обычные формулы		«Размерные» формулы	
$s = r\frac{\varphi}{\varphi_r} = r\{\varphi\}_{\text{рад}}$	(20)	$s = \rho\varphi$	(23)
$v = r\{\varphi\}^{\cdot}_{\text{рад}}$	(21)	$v = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega$	(24)
$a_t = r\{\varphi\}^{\cdot\cdot}_{\text{рад}}$	(22)	$a_t = \rho\ddot{\varphi} = \rho\varepsilon$	(25)

Формулы (23), (24), (25) являются уравнениями между величинами, справедливыми с учетом размерности плоского угла при выборе любых единиц. В обычно применяемые в механике формулы (20), (21), (22) необходимо подставлять только числовые значения угла в радианах, причем для обозначения безразмерных числовых значений в этих формулах применяют те же греческие буквы φ, ω и ε, которые во второй группе формул обозначают величины, учитывающие размерность угла.

Учет основной формулы (23) требует также изменения других привычных формул. Ограничимся следующими тремя примерами.

1) пользуясь принципом виртуальных перемещений, устанавливаем, что момент силы есть произведение силы на обкривизну виртуальной траектории;

2) вычисляя кинетическую энергию при вращении, находим, что момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению ее массы на квадрат обкривизны окружности, описываемой точкой при вращении;

3) в дифференциальном уравнении движения твердого тела вокруг неподвижной точки при применении системы координат, жестко связанной с телом, появляется множитель $1/\varphi$ у векторного произведения в левой части формулы

$$\dot{\vec{L}} + \frac{\vec{\omega}\vec{L}}{\varphi_r} = \vec{M}, \qquad (26)$$

где $\vec{L}$ — момент количества движения; ω — угловая скорость, M — момент внешних сил.

В табл. 3 сопоставлены размерности в системах LMT и $LMT\alpha$ важнейших механических величин, характеризующих вращательное движение твердого тела. Размерности кинетической энергии, работы, действия и мощности, естественно, совпадают в обеих системах.

Таблица 3

Величина и формула для ее вычисления	Размерность в системах	
	LMT	$LMT\alpha$
Угловая скорость, $\omega=\dot{\varphi}$	T^{-1}	$T^{-1}\ \alpha$
Угловое ускорение, $\varepsilon=\dot{\omega}$	T^{-2}	$T^{-2}\ \alpha$
Момент инерции, $I=m\rho^2$	L^2M	$L^2M\alpha^{-2}$
Момент силы, $M=F\rho$		
Вращающий момент, $M=\dot{L}=I\varepsilon$	L^2MT^{-2}	$L^2MT^{-2}\ \alpha^{-1}$
Момент количества движения (угловой момент), $L=I\omega$		
Импульс вращающего момента, Mt	L^2MT^{-1}	$L^2MT^{-1}\ \alpha^{-1}$

Размерности всех величин кинематики могут быть выражены в системе $LT\alpha$, всех величин динамики — в системе $LMT\alpha$. Система $LMT\alpha$ устраняет совпадение размерностей момента сил и работы, которое было обусловлено интегрированием размерности плоского угла.

В заключение можно сделать следующие выводы.

1. Присвоение плоскому углу самостоятельной размерности не приводит к нарушению размерной однородности формул, как это часто утверждают. Выведенные общие формулы (9), (10), (13)—(16) содержат размерные плоские углы и представляют собой уравнения между величинами, справедливые при любом выборе единиц угла.

2. Телесный угол является величиной, производной от плоского угла, с размерностью, равной квадрату размерности плоского угла. Радиан и стерадиан — согласованные единицы, предельно упрощающие все вычисления. Размерности всех геометрических величин могут быть выражены в системе «длина, угол» (табл. 1).

3. Отдельная группа «дополнительных единиц» в Международной системе единиц (ГОСТ 9867-61) должна быть ликвидирована. Единица плоского угла, радиан, должна быть отнесена к основным единицам системы, а единица телесного угла, стерадиан, к производным.

4. Аналитические выражения тригонометрических функций и формулы механики содержат в себе не плоские углы как самостоятельные геометрические величины, а только их числовые значения в радианах. Последовательный учет размерности плоского угла требует видоизменения некоторых формул механики. Размерности всех величин кинематики могут быть выражены в системе «длина, угол, время», а всех величин динамики — в системе «длина, угол, время, масса» (табл. 3).

5. С логической точки зрения следовало бы отдать предпочтение общим формулам, в которые входят размерные углы, однако нет необходимости ломать установившуюся традицию, исторически обусловленную тем, что понятие размерности возникло позже понятия кривизны.

Поступила в редакцию
9.3.1978 г.

УДК 531.7.08

Я. М. ЦЕЙТЛИН

ИДЕНТИФИКАЦИЯ* НОРМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты измерений длин и углов для сопоставимости, как известно, должны приводиться к определенным нормальным значениям влияющих величин: температуре 20° С, атмосферному давлению 101324,72 Па (760 мм рт. ст.), относительной влажности окружающего воздуха 58% (нормальное парциальное давление водяных паров 1333, 22Па) и т. д. (см. ГОСТ 8.050-73; DIN 1343-71 и др.).

Однако условия измерений не могут определяться только указанными реперными точками, так как реальные неоднородные и нестационарные явления не поддаются точному воспроизведению и расчету. Согласно ГОСТ 16263-70, нормальные условия измерений должны обеспечивать практическое исключение дополнительных погрешностей $\Delta_{доп}$, вызываемых выходом влияющих величин за пределы нормальной области значений. Однако в указанном стандарте нет прямого определения нормальных условий измерений. Не рассматриваются методы их нормирования и в известной научно-технической литературе [1, 6, 13]. В работе [1], например, на достаточно высоком научном уровне изложены методы анализа и расчета статистических параметров реальных условий в лабораториях и на открытых обеъектах, приведены конкретные данные. Однако критерии нормирования нормальных условий в работе не приводятся, хотя указывается на возможность неправильного использования понятий «нормальные» и «рабочие» условия измерений в качестве неправомерной уловки для фиктивного выполнения требований технических условий. В работе [6] говорится о нормальных, как о характерных, типичных условиях измерения. Вопрос установления нормальных условий должным образом не исследован, хотя он должен быть одним из фундаментальных в теории и практике точных измерений, так как оценивать точность

* Распознавание и установление соответствия.

измерений экспериментально без выбора реперных (референтных) условий их выполнения невозможно. Для расчетной же оценки необходимо достаточно полное описание условий измерений и априорное определение с соответствующей точностью функций влияния для средств и объектов измерения, что во многих практических случаях весьма затруднительно, а часто и невыполнимо.

Нормальные условия можно идентифицировать по нормированию соответствующих суперпозиций функций влияния. Если в качестве исходной рассматривать погрешность $\Delta_{сх}$ схемы измерительного средства [14], то в нормальных условиях, очевидно, должно выполняться соотношение

$$\Delta_{сх} + \Delta_{у} \leq \Delta_{д.осн}; \quad \Delta_{у} \leq \nu \Delta_{д.осн}, \tag{1}$$

где $\Delta_{у}$ — погрешность вследствие влияния условий измерения; $\Delta_{д\text{-}осн}$ — предел допускаемой основной погрешности средства измерений; ν — критерий малости составляющей основной погрешности.

Инструментальная погрешность измерения, согласно ГОСТ 16263-70, зависит от погрешности средства измерения. Однако при этом не следует смешивать реальную инструментальную погрешность с расчетной погрешностью схемы измерительного преобразователя или прибора. Последняя определяется без учета условий измерения расчетными методами, а для ее экспериментальной оценки необходимо обеспечить стабилизированные условия с номинальными значениями влияющих величин. Понятие «погрешность схемы» относится к области приборостроения и не включено в метрологическую терминологию.

Метрологические концепции точности измерений предусматривают возможность практического определения составляющих погрешности. Инструментальная (аппаратурная) погрешность в этом отношении не должна являться исключением.

Если суммарная погрешность $\Delta_{изм}$ измерения складывается из основной погрешности $\Delta_{осн}$ средства измерения, дополнительной $\Delta_{доп}$ погрешности от действия влияющих факторов и погрешности метода измерения $\Delta_{мет}$, то

$$\Delta_{изм} \supseteq \Delta_{осн} + \Delta_{доп} + \Delta_{мет} + \ldots \tag{2}$$

Сумма первых двух членов правой части выражения (2) и есть инструментальная погрешность измерения

$$\Delta_{ин} \supseteq \Delta_{осн} + \Delta_{доп}. \tag{3}$$

Естественно, что при идеальных нормальных условиях $\Delta_{доп}=0$, но для реальных сколь угодно жестких условий измерения строгое равенство нулю $\Delta_{доп}$ все же не обеспечивается.

При определении основной погрешности прибор взаимодействует с мерой, имеющей нормированные информативные (срединная длина, плоскопараллельность) и неинформативные (габариты, общая форма, материал) характеристики, а при рабочих измерениях параметры неинформативных свойств объекта распределяются в некотором достаточно широком диапазоне значений.

Следовательно, при измерении физическая система прибор — измеряемая деталь в отношении условий измерения имеет случайный оператор.

Вместе с тем, математическое ожидание дополнительной динамической погрешности влияния [5] при измерении в нормальных условиях может быть равно нулю, если средний оператор $m^{и}_{ш}$ системы прибор — объект измерения равен оператору $m^{м}_{ш}$ системы того же прибора в сочетании с установочной (образцовой) мерой, т. е.

$$m^{и}_{ш} = m^{м}_{ш} \qquad (4)$$

Таким образом, при изложенном подходе для практической проверки погрешности влияния не требуется ужесточения условий измерений по сравнению с выбранными нормальными, что существенно упрощает нормирование и обеспечение нормальных условий измерения. В связи с этим при ограничении нормальной области значений влияющих факторов выбираем область изменения этих факторов (физических величин), в пределах которой их влияние на результат наблюдения при измерениях принимается пренебрежимо малым. В частности, при таких условиях предел вероятного выхода $\delta_{ин}$ инструментальной составляющей $\Delta_{ин}$ погрешности измерения за предел допускаемой основной погрешности $\Delta_{д\cdot осн}$, средства измерения незначителен по критерию малости составляющей погрешности измерений, т. е.

$$\delta_{ин} = \left|\Delta_{ин}\right| - \left|\Delta_{д осн}\right| \leq \nu \Delta_{д изм},$$

где $\Delta_{д\cdot изм\cdot}$ — предел допускаемой погрешности измерения.

Известные статистические модели оценки условий измерения и определения дополнительных погрешностей, вообще говоря, достаточно сложны [1]. Вместе с тем, такие оценки систематической погрешности $\Delta_{сх}$. схемы $\hat{b}$ при исключении действия внешних влияющих факторов и функции $\hat{\Psi}$ влияния m_{γ} выполняются с определенной доверительной погрешностью, распределенной обычно по закону Уитшарта. Однако матрицы их ковариаций $D^*(\hat{b})$ и $D^*(\hat{m}_\gamma)$ определяются [9] через матрицы плана Ф и матрицу S_Φ рассеивания наблюдений, $y_{\alpha\gamma\xi}$, причем

$$D^*(\hat{b}) = k_{ff} N^{-1} (\Phi^T S_\Phi^{-1} \Phi^{-1})^{-1};$$

$$D^*(\hat{m}_\gamma) = k_{ff} g_\gamma^{-1} (\Phi^T S_\Phi^{-1} \Phi)^{-1}.$$

где T — транспонирование; k_{ff}, g_γ — весовые коэффициенты; N — число реализаций f.
Следовательно, погрешности оценок тем больше, чем больше матрица

$$S_\Phi = f^{-1} \sum_{\alpha\gamma\xi} (y_{\alpha\gamma\xi} - \bar{y}_{\gamma\xi})(y_{\alpha\gamma\xi} - \bar{y}_{\gamma\xi})^T,$$

вследствие вариации условий измерений γ, ξ. Нужно отметить также, что в практике линейных измерений и в соответствии с поверочной схемой для средств измерений длин и углов (ГОСТ 8.020-75 и ГОСТ 8.016-75) при определении основной погрешности дисперсионный анализ с выделением собственно систематической погрешности прибора и погрешностей от действия влияющих факторов не производится. Таким образом, выполнение поверочных работ в фиксируемых ненормированных условиях и в аспекте приложения дисперсионного многофакторного анализа нецелесообразно. Такой подход более уместен при специальных исследованиях измерительной аппаратуры.

В технологическом процессе измерительные средства используются для определения размеров поверхностей изделий, отклонений размеров или формы поверхностей от заданных, разбраковки и сортировки изделий при размерном контроле. Для того, чтобы при измерении определялся действительный размер изделия, случайные и неисключенные остатки систематических погрешностей должны быть достаточно малыми [17, 18].

Получаемое количество измерительной информации I_g, как известно [2], равно разности энтропии $H(x)$ измеряемой величины и условной энтропии распределения случайных погрешностей $H(\Delta)$.

При этом естественно требовать обеспечения $I_g > 0$ и

$$H(x) > H(\Delta). \qquad (5)$$

Так как энтропия погрешностей связана с энтропийным значением погрешности $\Delta_э$ экспоненциально, то, используя выражение энтропии $H(x)$ и доверительного интервала $V_н = \delta_{изд}$ поля рассеивания для соответствующих вероятностных законов распределения (нормального, равновероятного, существенно положительных величин и т. п.) контролируемого размера, можно рассчитать [12] верхние пределы допускаемых значений относительной погрешности η по зависимости

$$\eta = \frac{\Delta_з}{V_д} \tag{6}$$

Нужно отметить, что полученное таким образом требование для $\eta = v$ при нормальном распределении соответствует многолетней метрологической практике [3, 4] выбора критерия малости погрешностей измерения.

Допустимость применения информационных оценок в измерительной технике оспаривается отдельными авторами,* однако их мотивировки не представляются нам достаточными. В частности, нет особых оснований для использования СКО в качестве доминантной оценки погрешности измерения. Например, для закона распределения Коши СКО не определяется.

Вместе с тем, из формулы правдоподобия [14] путем несложных преобразований выявляется целесообразность использования энтропийной оценки. Если составить функцию произведений плотностей вероятности

$$L = P_1^{m_1}(\theta) P_2^{m_2}(\theta) \ldots P_r^{m_r}(\theta),$$

то

$$\ln L = m_1 \ln P_1(\theta) + m_2 \ln P_2(\theta) + \ldots + m_r \ln P_r(\theta). \tag{7}$$

Разделив левую и правую части выражения (7) на число $n = \Sigma m_i$, равное общему числу измерений, и обозначив $\frac{m_i}{n} = P_i$, получим

$$\frac{1}{n} \ln L = \sum_i P_i \ln P_i \tag{8}$$

Правая часть этого выражения соответствует энтропии $-\frac{1}{n} \ln L = H$. Критерий наибольшего правдоподобия, как известно, обеспечивает максимум функции (8) при фиксированном n. Последнее же отвечает требованию минимума энтропии H. То же следует и из соотношения правдоподобия [14].

---

* Ривкин А. С. О применении понятий теории информации к задачам измерительной техники. «Измерительная техника», 1968, № 2; Кирпатовский С. И. Об основных положениях информационной теории измерений. «Измерительная техника», 1974, № 5.

Таким образом, согласно критерию малости погрешности, действие влияющих факторов в нормальных условиях измерения не должно приводить к инструментальной погрешности, превышающей

$$\Delta_{ин} = \Delta_{д\,осн} + \nu\eta\delta_{изм}. \qquad (9)$$

а допускаемый выход инструментальной погрешности не должен превышать

$$\delta_{ин} \leqslant \nu\eta\delta_{изм} = \eta_{\nu}\delta_{изм}. \qquad (10)$$

Зная $\delta_{ин}$, по заданному пределу допускаемой погрешности измерения можно определить требования к точности соответствующего измерительного средства ($\Delta_{д\text{-}осн}$), применяемого в нормальных условиях.

Допускаемые значения выхода инструментальной погрешности за пределы допускаемой основной погрешности средства измерения в ГОСТ 8.050-73 дифференцированы в зависимости от точности измеряемых размеров, диапазона и вида измеряемой величины. Соблюдение в рабочем пространстве нормальных условий дает определенный экономический эффект за счет повышения производительности и точности измерений (см. МИ88-76).

В предположении малой неоднородности влияющих полей минимальные размеры рабочего пространства при известной топограмме парциальных функций влияния $\varphi_i(\xi)$, парциальных переходных функций $h_i(\xi)$, полученных методом локального воздействия влияющего фактора, например, температуры, на участки поверхности средства и объекта измерения, можно определить из отношения

$$\eta_{hj} = \frac{\sum_i h_{max\,ij}(\xi)}{\sum_i h_{max\,i0}(\xi)} \geqslant \frac{1}{3} = \nu$$

или

$$\eta_{\varphi j} = \frac{\sum_i \varphi_{ij}(\xi)}{\sum_i \varphi_{i0}(\xi)} \geqslant \frac{1}{3} = \nu.$$

Возможно, конечно, и применение вероятностных способов суммирования, причем в суммы по i входят только те участки, для которых

$$\eta_{hij} = h_{max\,ij}\left[\sup h_{max\,ij}\right]^{-1} \geqslant \frac{1}{3},$$

где $\sup h_{max_{ij}}$ — наибольшее значение максимумов парциальных переходных функций i-го участка поверхности j. За $h_{i0}(\xi)$ или

$\Psi_{j\alpha}(\xi)$ принимается соответствующая парциальная функция от воздействия влияющих факторов на участки измеряемой поверхности или ближайшие поверхности средства измерения, параллельные линии (плоскости) измерения и входящие в расчетную размерную цепь.

Задача выделения существенной влияющей величины решается дисперсионным анализом. Экспериментальное выделение осуществляется по оптимальным отсеивающим планам. Ориентировочно можно считать, что наибольшее произведение $\sup h_i(p)\,u_{\alpha j}(p)$ соответствует наиболее существенной влияющей величине $u_{\alpha j}$. Влияющие величины, для которых обеспечивается соотношение

$$\eta_u = \frac{h_i(p)\,u_{\alpha j}(p)}{\sup h_i(p)\,u_{\alpha i}(p)} \leqslant \frac{1}{3} \to \nu,$$

можно отнести к несущественным.

Для линейных измерений наиболее существенным влияющим фактором обычно является температура. При экспериментальном получении парциальных переходных функций [16] нагрев одного i-го локального участка на ΔT_i сопровождается, естественно, нагревом других участков j и прилежащих к ним слоев воздуха до ΔT_j, причем $\dfrac{\Delta T_j(t)}{\Delta T_i} = a_{ij}(t) \leqslant 1$. Следовательно, одновременно с фиксацией парциальной переходной функции температурного перемещения необходимо фиксировать тепловую картину поверхности измерительной системы, позволяющую построить матрицу $\| a_{ij} \|$ переходных функций сопутствующего нагрева смежных участков. Тогда при расчете температурных поправок в зависимости свертки вместо действительных приращений $u_j(t)$ температуры следует подставлять расчетные

$$\Delta T_i(t) = \int_0^t \left\| u_j(t-\tau) \right\| \frac{d}{d\tau} \left\| a_{ij}(\tau) \right\| d\tau. \qquad (11)$$

Здесь $a_{ii} = 1$; $a_{ij} < 1$ при $i \neq j$, а для удаленных участков $a_{ij} \approx 0$. Случайное влияющее поле можно аппроксимировать некоторым полиномом

$$u(x,t) = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(t)\,\varphi_{\alpha}(x),$$

где $\varphi_{\alpha}(x)$ — известные базисные функции. В этом случае задача выбора числа и размещения преобразователей влияющей величины в общем виде может решаться по методу Болотина В. В. [8] с оценкой чисел $k \geqslant 1$ обусловленности матриц $\varphi_{\alpha}(x_j) = \varphi_{j\alpha}$ или их детерминантов. Однако выбор соответствующих базисных функций и верхнего предела числа обусловленности специфичен. Для линейных и угловых измерений возможен следующий подход.

Если дополнительная погрешность

$$\Delta_{доп}[S(t)] = \sum_{\alpha} \varphi_{1\alpha}(x_j)\varphi_{2\alpha}[S(t)]\, u_{1\alpha}(x_j)\, u_{2\alpha}(t), \qquad (12)$$

то

$$<\Delta_{доп}> = \sum_{\alpha} \varphi_{1\alpha}(x_j) <\varphi_{2\alpha}[S(t)]> u_{1\alpha}(x_j) <u_{2\alpha}(t)>. \qquad (13)$$

При этом $\|\varphi_{j\alpha}\| = \|u_{1\alpha}(x_j)\|$, а верхний допускаемый предел числа обусловленности k этой матрицы можно оценить из соотношения

$$k = \frac{СКО <\varphi_{2\alpha}[S(t)]> <u_{2\alpha}(t)> \varphi_{1\alpha}(x_j)\, СКЗ\, u_{1\alpha}(x_j)}{СКЗ <\varphi_{2\alpha}[S(t)]> <u_{2\alpha}(t)> \varphi_{1\alpha}(x_j)\, СКО\, u_{1\alpha}(x_j)} \approx \frac{\Delta^{(1)}_{доп}}{\Delta^{(2)}_{доп}}, \qquad (14)$$

где угловые скобки означают осреднение по множеству; $s(t)$ — случайный измеряемый размер в момент t, СКЗ — среднее квадратическое значение.

При условии малой разницы между оценками значений $\Delta^{(1)}_{доп}$ и $\Delta^{(2)}_{доп}$ дополнительной погрешности

$$\Delta^{(1)}_{доп} - \Delta^{(2)}_{доп} \leqslant \eta \Delta^{(1)}_{доп} \qquad (15)$$

Откуда после подстановки (15) в выражение (14) получим

$$1 \leqslant k \leqslant 1 + \eta$$

В нормальных условиях достаточно потребовать

$$\Delta^{(1)}_{доп} - \Delta^{(2)}_{доп} \leqslant 2\eta\Delta_{д \cdot изм} \text{ и } 1 \leqslant k \leqslant 3.$$

Функцию дополнительной погрешности можно разложить в ряд Фурье, ограничившись существенными гармониками. Величины $\psi_1(x_j)$; $\psi_2[s(t)]$ при анализе условий измерений в большом помещении, где размещен ряд прецизионных приборов, могут отражать функцию влияния каждого из них, а x_j — координаты их расположения.

Погрешности средств линейных и угловых измерений часто аппроксимируются полиномами $P_n(s)$ наименьшего уклонения от нуля. Отсюда $< \Delta_{доп} > = A_\alpha\ P_\alpha(s)$,
где $P_\alpha\ (s)$ — соответствующее разложение полинома $P_n\ (s)$ в ряд Фурье степени α.

Тогда

$$\left\| u_{\alpha}(x_j) \right\| = \frac{A_{\alpha} P_{\alpha}(S)}{\left\| \varphi_{\alpha}[x_j, S(t)] \right\| < u_{\alpha}(t) >}. \qquad (16)$$

Аналогичен подход и к оценке моментов дополнительной погрешности более высоких порядков, а также к выбору числа и размещению эффективных компенсаторов.

Нетрудно показать, что в условиях, близких к нормальным, и при погрешности прибора, аппроксимируемой полиномами Чебышева 3-го и 5-го порядка, достаточно иметь 1—3 измерительных преобразователя существенной влияющей величины. При наличии местных источников направленного действия всю исследуемую поверхность следует разделить на зоны, в пределах которых флуктуации влияющего поля можно считать случайными.

На основе рассмотренных положений можно сделать следующие выводы:

1. Проблема распознавания и установления нормальных условий является одной из важнейших в теории и практике высокоточных измерений.

2. Нормальной следует считать область изменений влияющей физической величины, в пределах которой ее влияние на результат наблюдения при измерении принимается пренебрежимо малым по соответствующему контролю.

3. По указанному принципу построен ГОСТ 8.050-73 «Нормальные условия выполнения линейных и угловых измерений», внедрение которого обеспечивает поддержание единства линейных и угловых измерений в точном машино- и приборостроении, повышение их производительности, эффективности поверочных работ и взаимозаменяемости сопряжений.

4. Оптимальные размеры рабочего пространства, число и размещение в нем преобразователей имеют соответствующую обусловленность, оцениваемую по критерию малости составляющей погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кавалеров Г. И., Мандельштам С. М.** Введение в информационную теорию измерений. М., Энергия, 1974.

2. **Новицкий П. В.** Основы информационной теории измерительных устройств. Л., Энергия, 1968.

3. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии. М., Коммерприбор, 1949.

4. **Марков Н. Н., Кайнер Г. Б., Сацердотов П. А.** Погрешность и выбор средств при линейных измерениях. М., Машиностроение, 1967.

5. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3-е изд. М., Физматгиз, 1962.

6. **Абуладзе И. В.** Об одном методе оценки погрешности средств измерений в рабочих условиях эксплуатации. — Труды ВНИИЭП, 1973, вып. 18.

7. **Абуладзе И. В., Киселева Т. Л.** О построении статистической модели внешних факторов, влияющих на погрешность измерений. — Труды ВНИИЭП, 1972, вып. 13.

8. **Болотин В. В.** Оптимальное размещение датчиков для измерения случайных полей. — В кн. Механика деформируемых тел и конструкций. М., Машиностроение, 1975.

9. **Беляевский А. И.** Оценка влияния внешних факторов на погрешность измерительного прибора с учетом коррелированности наблюдений. — Труды ВНИИЭП, 1972, вып. 13.

10. **Цейтлин Я. М., Гречухина Г. Б.** Анализ условий выполнения линейных и угловых измерений. — Измерительная техника, 1976, № 1.

11. **Цейтлин Я. М.** Нормальные условия выполнения линейных и угловых измерений. — В кн. Разработка и внедрение единой для стран — членов СЭВ системы допусков и посадок. М., Изд-во стандартов, 1976.

12. **Цейтлин Я. М.** Выбор нормальных условий выполнения линейных и угловых измерений. — Измерительная техника, 1974, № 3.

13. Pond R. W. Environmental systems for a precision metrology laboratory. — ASHRAE Journ, 1970, v. 12, № 1.

14. **Уилкс С.** Математическая статистика. М., Наука, 1967.

15. **Кудряшева Ж. Ф., Рабинович С. Г., Резник К. А.** Методы обработки результатов наблюдений при измерениях. — Труды метрологических институтов СССР, М.—Л., Изд-во стандартов, 1972, вып. 134 (194).

16. **Бердзенишвили Г. Г., Богуславский М. Г., Цейтлин Я. М.** Расчетно-экспериментальный метод определения температурных погрешностей при линейных измерениях. — Измерительная техника, 1974, № 8.

17. **Цейтлин Я. М.** О нормальных условиях линейных и угловых измерений при активном контроле. — Измерительная техника, 1978, № 5.

18. **Цейтлин Я. М.** Условия получения статистически однородных результатов наблюдений при линейных измерениях. — Измерительная техника, 1978, № 9.

УДК 53.083.6

В. С. ПЕЛЛИНЕЦ

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В ряде случаев при измерении параметров переменных физических величин возникает необходимость дифференцирования экспериментальных зависимостей, содержащих помеху случайного характера.

Известно [1], что при помехе типа «белого» шума операция дифференцирования сигнала с помехой является некорректной. Для получения устойчивого решения необходима дополнительная информация о сигнале, либо о помехе, причем метод дифференцирования должен соответствовать виду и форме представления этой информации.

При решении задачи двукратного дифференцирования сигнала электронно-оптического измерителя перемещений [2], использованного в государственном специальном эталоне единицы ускорения при ударном движении с целью реализации абсолютного метода измерений [3] наилучшие результаты были получены с помощью интегрального метода обработки данных. Целью обработки является вычисление функционала:

$$a_n = \left| \frac{d^2}{dt^2} s(t) \right|_{max}.$$

Дополнительную информацию о свойствах сигнала перемещения получают от высокочастотного акселерометра, фактический коэффициент преобразования которого известен неточно.

Интегральный метод обработки основан на компенсации помехи путем усреднения выходного сигнала измерителя перемещения на интервале существования второй производной.

На упрощенной блок-схеме измерений (рис. 1) аналоговый преобразователь *1* соединен последовательно с линейным сумматором *2*, в который поступает помеха $n(t)$ (значение помехи приведено к выходу звена *2*). Звено *3* представляет собой идеальный двойной дифференциатор; звено *4* — преобразователь с теми же динамическими характеристиками, что и у звена *1*.

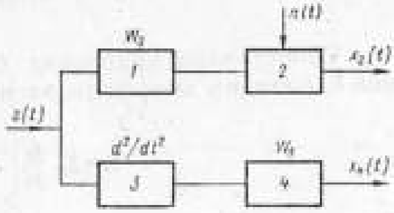


Рис. 1. Блок-схема измерительного устройства

Условия применимости метода следующие:

1) линейность звеньев системы;

2) одинаковые динамические погрешности за счет совокупности звеньев *1—2* и звена *4*;

3) близость к нулю среднего значения помехи на интервале существования второй производной от перемещения;

4) отсутствие взаимного сдвига во времени результатов регистрации сигналов *1* и *2* звеньев;

5) равенство сигналов на входе 1-го и 3-го звеньев;

6) отсутствие помехи в сигнале звена *3*;

7) равенство нулю входного сигнала $s(t)$ и его первой производной при $t \leqslant 0$.

Значение первого интеграла от выходного сигнала 2-го звена за время τ существования сигнала на выходе 4-го звена

$$y_a = \int_0^\tau x_2(t)dt = S_{oc}\int_0^\tau W_s[s(t)]dt + \int_0^\tau n(t)dt \qquad (1)$$

где S_{oc} — коэффициент преобразования 1-го звена; W_s — символический оператор преобразования сигнала звеном *1*. Согласно условию *3*, второй интеграл близок к нулю, поэтому

$$y_a = S_{oc}\int_0^\tau W_s[s(t)]dt + \delta, \qquad (2)$$

где $\delta \ll y_a$.

Далее найдем третий интеграл от сигнала $x_4(t)$ на том же интервале

$$y_b = S_s\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^\tau W_s\left[\frac{d^2}{dt^2}s(t)\right]dt\,dt\,dt.$$

При нулевых начальных условиях для физически реализуемого оператора W_s, используя последовательно прямое и обратное преобразование Лапласа, можно получить

$$y_b = S_s\int_0^\tau W_s\left[\int_0^\tau\int_0^\tau \frac{d^2}{dt^2}s(t)dt\,dt\right]dt$$

и, согласно условию 7

$$y_B = S_x \int_0^t W_5[s(t)]\,dt, \tag{3}$$

Сопоставляя уравнения (2) и (3) и пренебрегая величиной δ, находим коэффициент преобразования

$$S_x = S_{0c}\frac{y_b}{y_a}. \tag{4}$$

Решая уравнение

$$x_4(t) = S_x W_5\left[\frac{d^2 s}{dt^2}\right] \tag{5}$$

относительно d^2s/dt^2 и вычислив функционал максимального значения, находят искомый результат.

Таким образом, сущность интегрального метода заключается в приведении основной и вспомогательной экспериментальных зависимостей к одной и той же физической величине, после чего соотношение между ними без учета помех определяется постоянным множителем. При дополнительном интегрировании обеих зависимостей влияние помехи существенно снижается.

При практическом использовании метода необходимо обеспечить выполнение условий 1—7.

Выравнивание динамических погрешностей осуществляется в два этапа. На первом восстанавливают входной сигнал звена *2* одним из методов решения обратной задачи теории автоматического управления, например, с помощью физически обоснованной аппроксимирующей функции [4]. На следующем этапе решают прямую задачу применительно к характеристикам звена *1*; в рассмотренной задаче использовалась известная безразмерная переходная функция звена *1*. Последнее позволяет найти также соотношение $\varkappa$ между пиковыми значениями вторых производных восстановленного входного сигнала и сигнала $x_4(t)$, для которого найдено значение S_x. Это равносильно решению соотношения (*5*) относительно пикового значения d^2s/dt^2.

Для оценки эффективности метода в части подавления помехи найдем связь между энергетическим спектром шумов и средним квадратическим отклонением значения δ второго интеграла уравнения (1).

Обозначим через y_1 среднее значение гармонического сигнала на интервале $[t-\tau/2,\ t+\tau/2]$, отнесенное к амплитуде гармонического воздействия, где t — координата середины интервала усреднения (рис. 2). Тогда

$$y_1=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}}\sin\omega\xi\,d\xi=\frac{2}{\omega\tau}\sin\omega t\sin\omega\frac{\tau}{2}\;. \qquad (6)$$

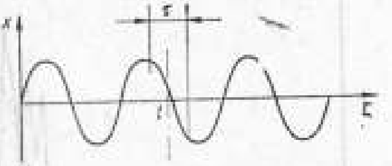


Рис. 2. К определению среднего значения функции

Здесь t следует рассматривать как случайную величину с равномерной плотностью распределения на интервале $[0, 2\pi/\omega]$. Ввиду периодического характера зависимости достаточно найти характеристики величины y_1 на указанном интервале. Среднее значение y_1 равно нулю

$$\bar{y}_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{\omega\tau}\sin\omega t\sin\omega\frac{\tau}{2}\,dt=0$$

Дисперсия величины y_1, выражается как

$$D(y_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{4}{\omega^2\tau^2}\sin^2\omega t\sin^2\omega\frac{\tau}{2}\,dt=\frac{2\sin^2\omega\frac{\tau}{2}}{\omega^2\tau^2}. \qquad (7)$$

Рассматривая энергетический спектр помехи $G(\omega)$ как плотность распределения квадратов амплитуд гармонических составляющих и полагая фазы гармонических составляющих помехи некоррелированными, получим с учетом (7) для дисперсии $D_п(y)$ величины y при случайной помехе выражение

$$D_п(y)=\int\limits_{\omega_н}^{\omega_в}G(\omega)D(y_1)\,d\omega=\frac{2}{\tau^2}\int\limits_{\omega_н}^{\omega_в}G(\omega)\frac{\sin^2\omega\frac{\tau}{2}}{\omega^2}\,d\omega \qquad (8)$$

Выражение (8) позволяет оценить погрешность от неполного выполнения условия 3.

Так, для помехи типа «белого» шума в интервале частот $[\omega_н, \omega_в]$ вычисление интеграла (8) дает

$$D_п(y)=\frac{u_п^2}{(\omega_в-\omega_н)\tau}\left[\frac{\omega_в\tau(1-\cos\omega_н\tau)-\omega_н\tau(1-\cos\omega_в\tau)}{\omega_н\omega_в\tau^2}+si(\omega_в\tau)-si(\omega_н\tau)\right].$$

где $u_п$ — действующее напряжение помехи; $si(z)$ — интегральный синус.

Для $\omega_н=0$ выражение (9) упрощается

$$D_п(y)=\frac{u_п^2}{\omega_в\tau}\,si(\omega_в\tau)$$

Рассмотрим пример. Пусть СКО помехи составляет 30% от максимального значения сигнала $s(t)$ (рис. 3).

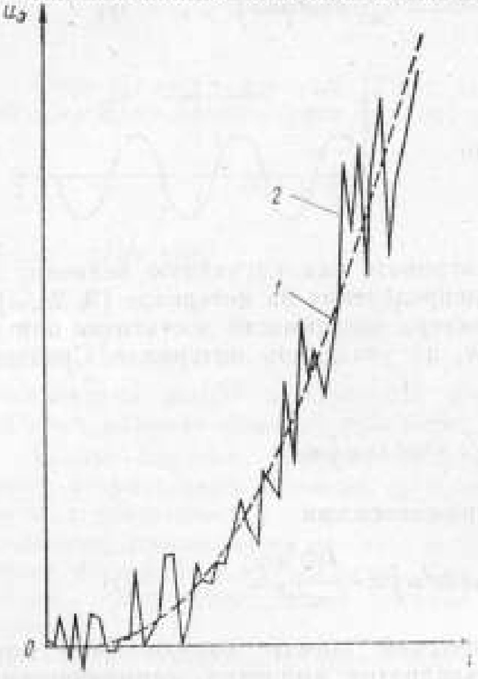


Рис. 3. Сигнал перемещения:
1 — без помехи; 2 — с наложенной помехой

Для длительности действия $\tau=2\cdot10^{-4}$ с диапазона рабочих частот от 0 до 40 000 Гц СКО величины y, $\sigma_в(y)=0{,}053$ от максимального значения функции, т. е. в шесть раз меньше СКО исходной помехи.

Практически спектр шума имеет некоторый подъем в области высоких частот, что способствовало улучшению эффективности метода. В результате при обработке зависимости, показанной на рис. 3 погрешность определения $a_п$ составила 2%.

Удовлетворение остальных условий обеспечивается выбором практической методики выполнения измерений, в частности, регулярная нелинейность может быть учтена при наличии нескольких значений S_0 при разных уровнях $s(t)$.

Применение указанной методики обеспечило повышение точности обработки результатов измерений в 1,3÷1,5 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арсенин В. Я., Иванов В. В.** Восстановление формы сигнала свободной от искажений, обусловленных аппаратурой и каналом передачи. — Измерительная техника, 1969, № 1.

2. **Ивашевский С. Н., Карташов А. И.** Оптико-электронная система измерения быстрых смещений. — Измерительная техника, 1972, № 4.

3. **Пеллинец В. С., Бабер И. С., Кованина Н. Н. и др.** Государственный специальный эталон единицы ускорения при ударном движении. — Измерительная техника, 1975, № 8.

4. **Пеллинец В. С.** Обобщенная импульсная аппроксимирующая функция. — В сб. «Вибрационная техника», М., МДНТП, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТЫ ПУБЛИКУЕМЫХ СТАТЕЙ

УДК 389

Пути дальнейшего развития теоретических основ метрологии. Тарбеев Ю. В. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 3—8.

Намечены пути дальнейшего развития теоретических основ метрологии, рассматриваемой как раздел технической физики, с одной стороны, и как техническая наука, с другой. Приведены примеры перспективных исследований, проводимых в таких областях, как электромагнетизм, термодинамика, механика, уточнение и согласование фундаментальных физических констант. Библ. 10.

УДК 53.08

О некоторых положениях теории измерений. Широков К. П. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 9—16.

Кратко изложены представления о связях между физическими величинами, размерностях величин и единицах. Указаны статьи автора с более полным изложением затронутых в статье вопросов. Библ. 3.

УДК 389.14

Основные метрологические характеристики групповых эталонов. Сирая Т. Н. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 17—26.

Дан общий теоретический анализ процедур воспроизведения и хранения единицы с применением групповых эталонов. Приведены основные требования к средствам измерений, входящим в состав группового эталона. Получены выражения для оценивания погрешности воспроизведения единицы групповым эталоном и передачи размера единицы вторичному эталону, а также погрешности определения значения элемента эталона в период хранения единицы. Получен критерий исключения нестабильных элементов из состава группового эталона. Приведены выражения для оценивания параметров, характеризующих нестабильность элементов эталона и погрешность их сличений. Библ. 5.

УДК 53.088

Методы оценивания погрешностей измерений. Рабинович С. Г. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 27—34.

Обобщены практические методы оценивания погрешностей измерений. Дана классификация измерений по точности оценивания их погрешностей. Рассмотрены измерения с точным оцениванием погрешностей. Выделен случай с двумя—тремя наблюдениями, часто встречающийся в практике точных измерений. Приведены расчетные формулы для измерений с приближенным оцениванием погрешностей. Охарактеризованы пути решения задачи для измерений с предварительным оцениванием погрешностей. Библ. 9.

УДК 389

Работы ВНИИМ по проблемам теоретической метрологии. Широков К. П., Рабинович С. Г. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 35—42.

Дан краткий обзор работ по проблемам теоретической метрологии, выполненных во ВНИИМ за последние годы. Основное внимание уделено результатам плановых работ, входящих в круг научных интересов авторов. Приведен перечень публикаций, освещающих результаты этих исследований. Библ. 48.

УДК 53.081:389

Роль фундаментальных физических констант в современной метрологии. Горбацевич С. В. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологческих институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 43—51.

Приводятся основные сведения о единицах тех физических величин, которые можно воспроизвести на основе устойчивых физических явлений или фундаментальных физических констант. Наряду с метром, килограммом и секундой, рассмотрены новые возможности, которые для воспроизведения вольта позволяют использовать эффект Джозефсона и физическую константу — отношение постоянной Планка к удвоенному элементарному заряду. Библ. 10.

УДК 536.5.081

Особенности проблемы воспроизведения и передачи размера единицы температуры — кельвина. Олейник Б. Н., Израилов К. С. — «Теоретические проблемы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 52—76.

Статья посвящена анализу особенностей проблемы воспроизведения и передачи размера единицы термодинамической температуры. Последняя, наряду с энергией и энтропией, является фундаментальной физической величиной и вместе с ними определяет все другие свойства материальных систем, независимо от степени их сложности. Опираясь на квантовомеханический, статистический и термодинамический аспекты вопроса, рассмотрены особенности свойств и физический смысл понятия температуры, сделана попытка уточнить концепцию температуры, ее меры и единицы измерения. Только на этой основе возможно правильное и успешное решение поставленной проблемы, а также вопроса о возможности измерения температуры в неравновесных системах. Библ. 11.

УДК [illegible]

[illegible] Кабакова С. И. — [illegible] Труды [illegible] СССР, вып. [illegible], 1979, с. [illegible]

[illegible]

УДК [illegible]

[illegible] Кабакова С. И. — [illegible] Труды [illegible] СССР, вып. [illegible], 1979, с. [illegible]

[illegible]

УДК [illegible]

[illegible] — Труды [illegible] СССР, вып. [illegible], с. [illegible]

[illegible]

УДК [illegible]

[illegible] — Труды [illegible] СССР, вып. [illegible], с. [illegible]

[illegible]

УДК 53.081

Единицы плоского и телесного угла. Пилипчук Б. И. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, 1979, вып. 237 (297), с. 77—85.

Присвоение плоскому углу самостоятельной размерности не приводит к нарушению размерной однородности формул, как это принято утверждать. Связь между измерениями длины и плоского угла возникает при определении кривизны ,которой необходимо приписать размерность «угла, деленного на длину», а не обратной длины, как обычно считают. Выведены формулы, которые содержат размерные плоские углы, и представляют собой уравнения между величинами, справедливые при любом выборе единиц угла. Телесный угол является величиной, производной от плоского угла с размерностью, равной квадрату размерности плоского угла. Радиан и стерадиан — согласованные единицы, предельно упрощающие вычисления. Радиан должен быть причислен к основным единицам Международной системы единиц, а стерадиан — к производным. Приведены размерности геометрических величин и важнейших механических величин, относящихся к вращательному движению. Табл. 3. Ил. 1.

УДК 531.7.08

Идентификация нормальных условий линейных и угловых измерений. Цейтлин Я. М. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 86—95.

Рассматриваются критерии выбора нормальной области физических влияющих факторов и обусловленность размещения измерительных преобразователей влияющих величин в рабочем пространстве. Библ. 18.

УДК 53.083.6

Метод дифференцирования экспериментальных данных. Пеллинец В. С. — «Теоретические вопросы метрологии». Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297), 1979, с. 96—100.

Изложен метод дифференцирования экспериментальных данных при наличии дополнительной информации по форме кривой искомой зависимости, использующий усреднение сигнала на заданном интервале времени. Дана расчетная оценка эффективности подавления помехи. Ил. 3.
Библ. 4.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ

Труды метрологических институтов СССР

Выпуск 237 (297)

Редактор *Л. Ф. Садовская*

Технический редактор *З. Г. Мамонова*

Корректор *И. Л. Перескокова*

Сдано в набор 29.03.78 г. Подписано к печати 7.06.79 г. М-13090

Формат 60х90 1/16 Тираж 500 Заказ № 7512 Цена 54 коп.

Бумага типографская № 3 7 п. л. 5,4 уч.-изд. л.

Типография № 5 Ленуприздата. Ленинград, Парголово, ул. Ломоносова, 115

Цена 54 коп.