Справ. 18/IV-90

НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕНИЕ

ВСЕСОЮЗНЫЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
ИМЕНИ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ISS N 0371-957X

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 242 (302)

НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
ВСЕСОЮЗНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ
им. Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

ТРУДЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СССР

Выпуск 242 (302)

Под редакцией к. т. н. С. Г. Рабиновича

ЛЕНИНГРАД
1979

Сборник освещает результаты работы НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» по развитию методов обработки результатов наблюдений при измерениях.

Рассматривается задача построения градуировочных характеристик средств измерений по экспериментальным данным. Основное внимание уделяется вопросам оценивания погрешностей. Уточняются условия применения метода наименьших квадратов. Даются рекомендации по использованию методов конфлюентного анализа.

Исследуются условия, при которых возможны измерения без повторных наблюдений (эти измерения чаще всего применяются на практике) и рассматриваются методы оценивания погрешностей таких измерений. В статьях приводятся практические примеры.

Материал сборника рассчитан на широкий круг метрологов, приборостроителей, а также инженерно-технических работников разных специальностей, связанных в своей деятельности с измерениями.

УДК 53.087.92.089.6

С. Г. РАБИНОВИЧ, Т. Н. СИРАЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОСТРОЕНИЕМ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

В измерительной практике широко используются измерительные преобразователи (ИП) — средства измерений, реализующие определенную функциональную зависимость между величинами на входе и выходе. Измерительному преобразователю соответствует истинная функция преобразования (ФП):

$$Y = f_и(X),$$

где X — величина на входе ИП; Y — величина на выходе.

При экспериментальном определении зависимости $f_и$ для изучаемого ИП получают градуировочную характеристику (ГХ) $Y=f(X)$. Градуировочная характеристика может быть задана с помощью формулы, графика или таблицы. Обычно стремятся иметь ГХ, заданную формулой, по возможности простого вида. Эта форма представления ГХ наиболее универсальна и характерна для многих практических задач; именно она и рассматривается далее. Если истинную ФП нельзя аппроксимировать простой функцией, то приходится задавать ГХ с помощью графика или таблицы.

При построении ГХ обычно для нескольких значений входной величины X_1, ..., X_m измеряют соответствующие выходные величины Y_1, ..., Y_m. Таким образом получают набор экспериментальных данных (x_i, y_i), $i=1 \dots m$, где $x_i = X_i + \xi_i^x$, $y_i = Y_i + \xi_i^y$ — результаты измерений величин X_i и Y_i, а ξ_i^x и ξ_i^y — погрешности измерений.

В некоторых случаях входные величины X_i могут быть точно известны. По этим данным строят ГХ $Y=f(X)$, которую затем используют для оценивания значений входных величин по выходным.

Экспериментально найденная ГХ отличается от истинной ФП; это прежде всего вызвано погрешностями измерений, выполняемых при определении ГХ. Если ГХ представлена в аналитическом виде, то, кроме того, имеется погрешность из-за аппроксимации истинной ФП с помощью функций данного вида. Погрешность построенной ГХ можно представить в виде:

$$\zeta\left[Y(X)\right] = f(X) - f_{\text{и}}(X) = \zeta_0(X) + \zeta_{\text{и}}(X),$$

где $\zeta_0(X) = f_0(X) - f_{\text{и}}(X)$ — погрешность из-за аппроксимации истинной ФП $f_{\text{и}}$ с помощью функции f_0 выбранного вида, наилучшим образом приближающей $f_{\text{и}}$;
$\zeta_{\text{и}}(X) = f(X) - f_0(X)$ — погрешность, обусловленная погрешностями измерений при построении ГХ.

Для большинства практических задач желательна линейная ГХ

$$Y = a + bX.$$

Тогда погрешность этой ГХ $\zeta(X) = \zeta_0(X) + \zeta_{\text{и}}(X)$, где $\zeta_0(X)$ — погрешность из-за нелинейности истинной ФП. Нелинейные ГХ обычно встречаются двух видов:

$$1)\quad Y = \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi_j(X),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — известные функции, а параметры $a_1, \ldots, a_k$ подлежат определению;

$$2)\quad Y = f(X, a, b),$$

здесь неизвестны лишь параметры a и b, а функция сводится к линейной функции $Y' = a' + b'X'$ путем замены переменных $X' = \varphi(X)$, $Y = \psi(Y)$.

На практике наиболее важными ГХ первого вида являются полиномы, а второго вида — показательные, степенные и дробно-рациональные ГХ.

При построении ГХ особенно важно оценивать погрешности получаемой ГХ; при этом следует учитывать погрешности измерений не только выходных, но и входных величин, а также то, что эти погрешности содержат не только случайные, но и систематические составляющие.

При использовании ГХ значения входной величины оцениваются по выходной, т. е. $x = f^{-1}(y)$. В связи с этим иногда рекомендуют вместо обычной (прямой) ГХ строить обратную ГХ $X = g(Y)$. Как показал анализ, строить обратную ГХ целесообразно лишь в том случае, когда относительные погрешности измерений выходных величин малы по сравнению с погрешностями входных величин, что на практике встречается весьма редко.

Исследованию измерительных преобразователей посвящено много работ и, в первую очередь, следует упомянуть монографию [1]*. Обычно приводится анализ погрешностей ГХ для случая задания ГХ в графическом или табличном виде; заданные аналитически ГХ рассматривались недостаточно, хотя и являются важными для практики. Данная статья посвящена построению ГХ в аналитическом виде и анализу их погрешностей.

Основные этапы построения градуировочных характеристик

Независимо от вида ГХ и конкретного метода обработки результатов наблюдений построение ГХ целесообразно выполнять в следующем порядке:

1. Определяют функциональный вид ГХ. При этом могут возникнуть следующие ситуации:

а) вид ГХ известен из физических соображений. Например, из физических закономерностей, описывающих свойства ИП, следует, что ГХ линейна. Однако определить вид ГХ таким образом не всегда возможно (или полученная зависимость окажется слишком сложной);

б) форма ГХ задана заранее. Например, требуется построить линейную ГХ. В этом случае необходимо также оценить степень нелинейности истинной ФП;

в) вид ГХ приближенно определяется на основании опыта и предварительного анализа экспериментальных данных. В данном случае необходимо удостовериться в правильности выбора вида ГХ.

2. Строят ГХ выбранного вида. При выборе метода построения ГХ учитывают функциональный вид ГХ и имеющиеся сведения о погрешностях (соотношение между погрешностями измерений входных и выходных величин, между случайными и систематическими погрешностями и т. д.). По экспериментальным данным находят параметры ГХ и составляют уравнение ГХ (или строят ее график). Заметим, что параметры ГХ являются оценками параметров истинной ФП.

---

* См. также статьи В. Н. Кузнецова «О нормировании погрешностей измерительных усилителей.» — Измерительная техника, 1968, № 10; Г. П. Лукина и В. Я. Розенберга «Об оценке погрешности определения зависимости между величинами». — Измерительная техника, 1976, № 8.

3. Оценивают погрешности построенной ГХ. Оценивают дисперсию и смещение параметров ГХ и расчетных значений $f(X)$, а также их общую погрешность.

4. Проверяют правильность выбора функционального вида ГХ либо оценивают степень отклонения истинной ФП от функции принятого вида (например, степень нелинейности).

При построении ГХ иногда целесообразно последовательно применять несколько методов. Сначала, используя один из простых методов, находят первое приближение. Далее на основе полученного первого приближения уточняют ГХ, применяя более сложный и точный метод (см. Приложение).

При поверке ИП часто заново определяют ГХ. При этом возникает задача выяснить, насколько изменилась истинная ФП. Если обнаружено существенное изменение ГХ (но это изменение не превосходит установленных пределов), то за ГХ ИП принимают новую ГХ.

Способы выражения погрешностей ГХ

Погрешность ГХ в точке X

$$\zeta[Y(X)] = f(X) - f_u(X) \qquad (1)$$

обусловлена погрешностями измерений входных и выходных величин, а также неточным соответствием функционального вида $f(X)$ истинной ФП $f_и(X)$. Далее будем предполагать, что вид ГХ задан или выбран правильно и рассматриваются лишь погрешности, обусловленные погрешностями измерений.

Способ оценивания погрешностей ГХ зависит от метода построения ГХ и сведений о погрешностях измерений входных и выходных величин. Погрешности измерений имеют вид:

$$\zeta_i^x = \vartheta_i^x + \nu_i \; ; \quad \zeta_i^y = \vartheta_i^y + \varepsilon_i ,$$

где ϑ_i^x и ϑ_i^y — систематические погрешности;
ν_i и ε_i — случайные погрешности.
При выборе метода построения и анализе погрешностей ГХ необходимо рассмотреть следующие варианты.

1. Известны лишь границы суммарных погрешностей

$$\left|\zeta_i^x\right| \leq \Delta_x ; \quad \left|\zeta_i^y\right| \leq \Delta_y .$$

2. Известны характеристики систематических и случайных погрешностей; для систематических погрешностей — их границы

Θ_x и Θ_y, для случайных погрешностей — дисперсии $D\nu_i = \sigma_x^2$ и $D\varepsilon_i = \sigma_y^2$.

Часто считают, что случайные погрешности имеют нормальное распределение. Это проверяют, выполняя многократные наблюдения и используя соответствующие статистические критерии.

Если погрешности ζ_i или θ_i примерно постоянны во всех точках диапазона (хотя для них известны лишь границы), то применение статистических методов для построения ГХ не обосновано. Применяя один из численных методов, получают некоторую ГХ, однако ее погрешности могут быть оценены довольно грубо. На практике наиболее распространенным является случай, когда погрешности ζ_i или θ_i в разных точках диапазона различны и для построения ГХ и оценивания ее погрешностей можно использовать численные методы, основанные на усреднении и сглаживании, близкие к статистическим методам. Таким образом, хотя погрешности ζ_i или θ_i и не случайны, но для обработки результатов измерений применимы статистические методы [3]. Именно в этом смысле далее набор погрешностей $\zeta_1, ..., \zeta_m$ или $\theta_1, ..., \theta_m$ можно рассматривать как случайную выборку. Для оценивания погрешностей ГХ необходимо ввести допущение о функции распределения; чаще всего принимают осторожное предположение о равномерном распределении в заданных границах [3].

Если для погрешностей измерений заданы лишь границы, то для погрешностей ГХ обычно оценивают границы, причем либо для каждой точки диапазона

$$\left|\zeta[Y(X)]\right| \leq \Delta Y(X),$$

либо для всего диапазона

$$\left|\zeta[Y(X)]\right| \leq \Delta(Y).$$

В тех случаях, когда для построения ГХ используют статистические методы, точность построения ГХ иногда характеризуют с помощью доверительных интервалов. Для заданной доверительной вероятности $1-\gamma$ при каждом значении X можно построить такие функции от результатов наблюдений $Y_1(X)$ и $Y_2(X)$, чтобы для выходной величины $Y=f_н(X)$ с вероятностью $1-\gamma$ выполнялось условие

$$Y_1(X) < Y < Y_2(X). \qquad (2)$$

Построив доверительные интервалы для всех значений X в диапазоне (X_{min}, X_{max}), получим доверительную полосу для истинной функции преобразования $f_н(X)$. При этом условие (2) выполняется лишь для каждой отдельной точки X (но не одновременно для нескольких точек). Иногда также строят доверительную область, которая с вероятностью $1-\gamma$ накрывает всю истинную ФП целиком (с вероятностью $1-\gamma$ неравенство (2) выполняется для всех X одновременно).

В некоторых случаях представляет особый интерес один из параметров ГХ (например, коэффициент преобразования в случае линейной ГХ). Тогда можно отдельно оценивать границы для погрешности данного параметра

$$|\zeta(b)| \leq \Delta_b ,$$

либо строить доверительные интервалы для истинного значения параметра.

Основные соотношения для погрешностей ГХ

Как правило, в работах по оцениванию погрешностей ГХ рассматривают ГХ, заданные в виде таблицы или графика, построенного без сглаживания. В этом случае по результатам измерений строят график или составляют таблицу ГХ, и погрешность ГХ определяется лишь погрешностями измерений входной и выходной величин в данной точке*:

$$\zeta[Y(X)] \approx \zeta^y + \eta(X)\zeta^x .$$

где $\eta(X)=\frac{df_y}{dX}(X)$ — коэффициент влияния в точке X. Если для погрешностей ζ^x и ζ^y заданы лишь границы Δ_x и Δ_y то для $\zeta[Y(X)]$ получаем границы

$$\left|\zeta[Y(X)]\right| \leq \Delta = \Delta_y + \eta_m \Delta_x ,$$

где $\eta_m = max|\eta(x)|$.

Рассмотрим более сложный случай, когда ГХ представлена в аналитическом виде (или графиком, отвечающим определен-

* Если график построен со сглаживанием экспериментальных данных, то погрешность ГХ в данной точке зависит также и от погрешностей измерений в других точках, и поэтому оценивание погрешности ГХ выполняется аналогично тому, как и при задании ГХ в аналитическом виде.

ному аналитическому выражению). Предполагается, что истинная зависимость $f_и(X)$ принадлежит известному классу функций, определяемых небольшим числом параметров; для простоты изложения ограничимся классом функций, зависящих от двух параметров

$$f_и(X) = \Phi(X, \alpha, \beta).$$

Тогда ГХ имеет такой же функциональный вид

$$f(X) = \Phi(X, a, b),$$

а параметры a и b оцениваются по экспериментальным данным

$$a = a(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m), \quad b = b(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m).$$

Обычно функции Φ имеют достаточно простой и гладкий вид; поэтому для погрешностей возможно следующее приближенное представление:

$$\zeta[Y(X)] = \Phi(X, a, b) - \Phi(X, \alpha, \beta) \approx \sum_{i=1}^{m} \left[\varphi_{xi}(X) \zeta_i^x + \varphi_{yi}(X) \zeta_i^y \right],$$

где $\varphi_{xi}(X) = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i}$; $\varphi_{yi}(X) = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y_i}$.

Все производные вычисляются в точке (X, a, b).

Рассмотрим основные варианты задания исходных погрешностей.

1. Для погрешностей измерений известны лишь границы. Можно оценить сверху границы погрешности ГХ в точке X:

$$\Delta Y(X) = \Delta_x \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_{xi}(X) \right| + \Delta_y \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_{yi}(X) \right|,$$

а также общую границу для всего диапазона

$$\Delta = \varphi_x \Delta_x + \varphi_y \Delta_y,$$

где $$\varphi_x = \max_x \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_{xi}(X) \right| ; \quad \varphi_y = \max_y \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_{yi}(X) \right|.$$

Однако эти границы обычно значительно превышают действительные погрешности. Как уже отмечалось, в большинстве практических случаев можно рассматривать наборы погрешностей $\zeta_1^x, \ldots, \zeta^x_m$ и $\zeta_1^y, \ldots, \zeta_1{}^y_m$ как выборка из равномерных распределений на $[-\Delta_x, \Delta_x]$ и $[-\Delta_y, \Delta_y]$. Тогда при выбранной вероятности $1-\gamma$ получают приближенные границы для $\zeta[Y(X)]$:

$$\Delta[Y(X)] = z_\gamma \sigma[Y(X)],$$

где $\quad \sigma^2[Y(X)] = \frac{\Delta_x^2}{3}\sum_1^m |\varphi_{xi}(X)|^2 + \frac{\Delta_y^2}{3}\sum_1^m |\varphi_{yi}(X)|^2$;

z_γ — квантиль стандартного нормального распределения, соответствующий вероятности $1-\gamma$ (предполагается, что число точек m больше 5, и поэтому распределение суммы равномерных величин ζ_i^x, ζ_i^y близко к нормальному).

2. Известны характеристики случайной и систематической погрешностей измерений. Для погрешности ГХ имеем разложение

$$\zeta[Y(X)] = \vartheta(X) + \varepsilon(X),$$

где $\quad \vartheta(X) = \Sigma[\varphi_{xi}(X)\vartheta_i^x + \varphi_{yi}(X)\vartheta_i^y]$ — систематическая,

$\varepsilon(X) = \Sigma[\varphi_{xi}(X)v_i + \varphi_{yi}(X)\varepsilon_i]$ — случайная погрешности.

Дисперсия случайной погрешности $\varepsilon(X)$ приближенно равна

$$D\varepsilon(X) \approx \sigma_x^2 \sum_1^m |\varphi_{xi}(X)|^2 + \sigma_y^2 \sum_1^m |\varphi_{yi}(X)|^2$$

Систематическая составляющая $\vartheta(X)$ оценивается границами

$$\theta(X) = \theta_x \sum_1^m |\varphi_{xi}(X)| + \theta_y \sum_1^m |\varphi_{yi}(X)|.$$

Как отмечалось, обычно такие границы завышены. Если наборы систематических погрешностей $\vartheta_1{}^x, \ldots, \vartheta^x{}_m$ и $\vartheta_1{}^y, \ldots, \vartheta^y{}_m$ можно рассматривать как выборки из равномерных распределений из $[-\Theta_x, \Theta_x]$ и $[-\Theta_y, \Theta_y]$, то приближенные границы систематической составляющей можно оценить как

$$\theta(X) = z_\gamma \sigma[\vartheta(X)], \tag{3}$$

где $\sigma^2[\vartheta(X)] = \frac{\theta_x^2}{3} \sum_1^m |\varphi_{xi}(X)|^2 + \frac{\theta_y^2}{3} \Sigma |\varphi_{yi}(X)|^2$.

Например, если при построении линейной ГХ используют дробно-линейные оценки*

$$b = \sum_1^m \omega_i y_i \Big/ \sum_1^m \omega_i x_i, \qquad a = \bar{y} - b\bar{x},$$

то погрешность полученной ГХ в точке X

$$\zeta[\tilde{Y}(X)] \approx \sum_1^m \left[\frac{1}{m} + \frac{\omega_i}{W_x}(X - \bar{x})\right](\zeta_i^y - b\zeta_i^x),$$

где $W_x = \Sigma \omega_j x_j$

Дисперсия случайной составляющей

$$D\varepsilon(X) \approx \left[\frac{1}{m} + \frac{\Sigma \omega_i^2}{W_x^2}(X - \bar{x})^2\right](\sigma_y^2 + b^2\sigma_x^2).$$

Систематическая составляющая имеет вид

$$\vartheta(X) = \sum_1^m \left[\frac{1}{m} + \frac{\omega_i}{W_x}(X - \bar{x})\right](\vartheta_i^y - b\vartheta_i^x)$$

и оценивается сверху границами:

$$\theta(X) = \left[1 + \Sigma |\omega_i(X - \bar{x})| \Big/ |W_x|\right](\theta_y + |b|\theta_x).$$

Если известно, что систематические погрешности примерно постоянны: $\vartheta_i^x \approx \vartheta_x$, $\vartheta_i^y \approx \vartheta_y$, то $\vartheta(X) \approx \vartheta_y - b\vartheta_x$ и оценивается границами $\theta_y + |b|\theta_x$. Если систематические погрешности можно рассматривать как выборки из равномерных распределений, то приближенные границы $\Theta(X)$ оцениваются по формуле (3), где

$$\sigma^2[\vartheta(X)] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{m} + \frac{\Sigma \omega_i^2}{W_x^2}(X - \bar{x})^2\right](\theta_y^2 + b^2\theta_x^2).$$

---

* Это означает, что применяется один из методов конфлюентного анализа. Подробно о таких оценках см. статью Т. Н. Сирой «Методы конфлюентного анализа для построения линейных зависимостей» в настоящем сборнике, стр. 33.

Полученные формулы можно применять для оценивания погрешностей ГХ в аналитическом виде с учетом систематических погрешностей измерений входных и выходных величин.

Приложение

Приведем пример построения ГХ методом последовательных приближений, когда сначала строят ГХ простого вида, а затем ее уточняют.

Многоэлементные воздушные термопреобразователи ТЭМ-1 должны обладать квадратичной вольт-амперной характеристикой*:

$$Y = aX^2,$$

где X — переменный ток на входе; Y — э.д.с. на выходе. У реальных термопреобразователей функция преобразования может несколько отличаться от квадратичной. Для точных измерений ГХ представляют в виде полиномов

$$Y = aX^2 + bX^3 \qquad Y = aX^2 + bX^4$$

При градуировке ИП с помощью потенциометра устанавливают 10 значений тока: $x_i = i \times 3$ мА, $i = 1, \ldots, 10$. Для измерений соответствующих значений э. д. с. Y_i (которые находятся в пределах 0—16 мВ) также используют потенциометр. Был использован потенциометр Р348 класса 0,002, резистор Р321 класса 0,01 с номинальным сопротивлением 1 Ом и нормальный элемент класса 0,005.

Относительные погрешности измерений тока можно представить в виде

$$\varepsilon_i^x = \varepsilon_{mi}^x + \varepsilon_{нэ} + \varepsilon_p ,$$

где $\varepsilon_п{}^x$ — погрешность потенциометра при измерении X_i;
$\varepsilon_{нэ}$ — погрешность нормального элемента;
$\varepsilon_р$ — погрешность измерительного резистора.

Аналогичным образом можно представить погрешность измерения напряжения

$$\varepsilon_i^y = \varepsilon_{mi}^y + \varepsilon_{нэ} ,$$

* **А. Я. Безикович, О. Н. Гравин.** Исследование воздушных многокомпонентных термопреобразователей. — Труды институтов Госкомитета, 1965, вып. 82 (142).

где $\varepsilon_{\text{п}i}^{y}$ — погрешность потенциометра при измерении Y_i. В диапазоне 2—30 мВ погрешности потенциометра $\varepsilon_{\text{п}i}^{y}$ (а также $\varepsilon_{\text{п}i}^{x}$) не превосходят $4\cdot10^{-5}$.

Поскольку ГХ близка к квадратической, целесообразно сначала приблизить ГХ функцией $Y=a_0X^2$, а затем уточнить ее, аппроксимируя остатки $z_i = y_i - a_0 x_i^2$. Удобно взять

$$a_0 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\frac{y_i}{x_i^2}.$$

Результаты измерений, полученные при градуировке одного из термопреобразователей ТЭМ-1, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты измерений и расчетные данные для построения ГХ термопреобразователя

x_i, мА	y_i,мВ	$\frac{y_i}{x_i^2}\cdot10^3$	$a_0\, x_i^2$	$z_i\cdot10^4$	$\hat{Y}_i$	$d_i\cdot10^4$
3	0,1471	16,344	0,1462	9	0,1463	—8
6	0,5856	16,267	0,5848	8	0,5851	—5
9	1,3167	16,256	1,3158	9	1,3163	—4
12	2,3397	16,248	2,3392	5	2,3397	0
15	3,6551	16,245	3,6551	0	3,6552	1
18	5,2624	16,242	5,2634	—10	5,2627	3
21	7,1618	16,234	7,1640	—22	7,1621	3
24	9,3534	16,239	9,3571	—37	9,3531	—3
27	11,8361	16,236	11,8426	—65	11,8358	—3
30	14,6105	16,234	14,6205	—100	14,6100	—5

В качестве первого приближения получено $a_0=0{,}016245$ мВ/мА^2. Далее вычислены остатки $z_i=y_i-a_0x_i^2$ и величины

$$v_i = \frac{z_i}{x_i^2} = \frac{y_i}{x_i^2} - a_0.$$

Аппроксимируем зависимость $v=v(X)$ линейной функцией $v=c_0+c_1X$. В данном случае X является контролируемой переменной*, поэтому для построения зависимости $v(X)$ можно применить метод наименьших квадратов. Вычисления коэффици-

* См. статью С. Г. Рабиновича и Т. Н. Сирой «Условия применения метода наименьших квадратов и оценивание погрешностей при построении градуировочных характеристик» в настоящем сборнике, стр. 17.

ентов прямой приведены в табл. 2 (значений $X_i < 10$ мА не рассматриваются, так как в начале диапазона точность измерений мала, а при переходе к зависимости $Y(X)$ веса X_i^2 невелики).

Таблица 2

Построение зависимости v(X)

X_i	v_i	$X_i-\overline{X}$	$v_i(X_i-\overline{X})$	$(X_i-\overline{X})^2$	$\hat{v}(X_i)$	$\hat{v}_i-v_i$
12	4	−9	−36	81	2,7	1,3
15	0	−6	0	36	0,3	−0,3
18	−3	−3	9	9	−2,1	−0,9
21	−5	0	0	0	−4,5	−0,5
24	−7	3	−21	9	−6,9	−0,1
27	−9	6	−54	36	−9,3	0,3
30	−11	9	−99	81	−11,7	0,7

В результате получена прямая $\hat{v}(X) = (12{,}3-0{,}8X)\cdot 10^{-6}$ и ГХ термопреобразователя

$$\hat{Y}(X) = a_0 X^2 + \hat{v}(X)X^2 = (16{,}2573X^2 - 0{,}0008X^3)\cdot 10^{-5}.$$

Расчетные значения $\hat{Y}_i$, полученные согласно этой ГХ, а также отклонения $d_i = \hat{y}_i - y_i$ приведены в табл. 1. Эти отклонения составляют единицы последнего разряда y_i. Поэтому полученная аппроксимация является удовлетворительной и нет необходимости переходить к более сложной зависимости.

Оценим погрешности коэффициентов построенной ГХ. Относительная погрешность определения коэффициента a_0 равна

$$\varepsilon(a_0) = \bar{\varepsilon}^y - 2\bar{\varepsilon}^x = -2\varepsilon_p - \varepsilon_{H0} + \bar{\varepsilon}_n^y - 2\bar{\varepsilon}_n^x \approx -2\varepsilon_p - \varepsilon_{H0},$$

так как составляющие $\bar{\varepsilon}_n^x$ и $\bar{\varepsilon}_n^y$ малы. Поэтому погрешность $\varepsilon(a_0)$ носит систематический характер и оценивается границами.

$$|\varepsilon(a_0)| \leq 2{,}1\cdot 10^{-4}.$$

Абсолютная погрешность a_0 равна $a_0 \varepsilon(a_0)$ и оценивается границами $3{,}3\cdot10^{-6}$ мВ/мА^2.

Абсолютные погрешности отклонений v_i равны примерно

$$\zeta(v_i)=a(\varepsilon_i^x-2\varepsilon_i^y-\bar\varepsilon^y+2\bar\varepsilon^x)\approx a(\varepsilon_{\text{п}i}^y-2\varepsilon_{\text{п}i}^x).$$

Погрешности потенциометра $\varepsilon_{\text{п}i}^x$ и $\varepsilon_{\text{п}i}^y$ изменяются по диапазону, и можно считать, что погрешности $\zeta(v_i)$ носят случайный характер. Оценим СКО абсолютной погрешности $\zeta(v_i)$ двумя способами: 1) используя заданные границы для погрешностей потенциометров и приняв допущение, что погрешности $\varepsilon_{\text{п}i}^x$ и $\varepsilon_{\text{п}i}^y$ равномерно распределены в границах $\pm4\cdot10^{-5}$, получим

$$\hat\sigma=a\sqrt{\frac{1}{3}(\theta_y^2+4\theta_x^2)}=1{,}62\cdot10^{-2}\sqrt{\frac{1+4}{3}}\cdot4\cdot10^{-5}=8{,}4\cdot10^{-7};$$

2) оценивая СКО по отклонениям экспериментальных значений v_i от расчетных $\hat v_i$ имеем (в соответствии с формулой (2) на стр. 20)

$$s=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n}(\hat v_i-v_i)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}\cdot3{,}43}\cdot10^{-6}=8{,}2\cdot10^{-7}.$$

Эти две оценки согласуются удовлетворительно.

Таким образом, абсолютные погрешности коэффициентов c_0 и c_1 носят случайный характер. Согласно формулам (1) на стр. 20, их СКО оцениваются как

$$\sigma(c_1)=\frac{\sigma}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar x)^2}}\approx\frac{8{,}4\cdot10^{-7}}{\sqrt{252}}=0{,}53\cdot10^{-7};$$

$$\sigma(c_0)=\sigma\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{\bar x^2}{\Sigma(x_i-\bar x)^2}}\approx8{,}4\cdot10^{-7}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{441}{252}}=1{,}2\cdot10^{-6}.$$

Погрешности расчетных значений $\hat v(X)$ имеют СКО

$$\sigma[\hat v(X)]=\sigma\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{(X-\bar x)^2}{\Sigma(x_i-\bar x)^2}}\leqslant1{,}2\cdot10^{-6}.$$

В полученной ГХ $\hat Y(X)=aX^2+bX^3$ систематическая погрешность коэффициента $a=a_0+c_0$ лежит в границах $\pm3{,}3\cdot10^{-6}$, а случайная имеет СКО $1{,}2\cdot10^{-6}$. Для коэффициента $b=c_1$ СКО равно примерно $0{,}53\cdot10^{-7}$. Следовательно, систематическая погрешность расчетного значения $\hat Y(X)$ лежит в границах $\pm3{,}3\cdot10^{-6}X^2$, а случайная погрешность имеет СКО

$$0,53 \cdot 10^{-7} \sqrt{36 + (X-21)^2}\, X^2$$

(погрешности даны в милливольтах, а значения X — в миллиамперах).

На практике часто проверяется лишь форма ГХ, например, насколько она близка к квадратичной. В этом случае систематическую составляющую погрешности можно не учитывать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Электрические измерительные преобразователи.** Кончаловский В. Ю., Купершмидт Я. А. Сыропятова Р. Я., Харченко Р. Р. — М., Энергия, 1967.
2. **Айвазян С. А.** Статистическое исследование зависимостей, М., «Металлургия», 1968.
3. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений, М.-Л., Энергия, 1978.

Поступила в редакцию
6/VI 1979 г.

УДК 53.088.089.6 : 519.281.2

С. Г. РАБИНОВИЧ, Т. Н. СИРАЯ

УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Условия применения метода наименьших квадратов

При нахождении функциональных зависимостей по экспериментальным данным обычно используют метод наименьших квадратов. Искомая зависимость должна быть представлена в виде

$$Y=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\varphi_j(X),$$

где φ_j — известные функции; α_j — неизвестные коэффициенты. Пусть имеются результаты измерений (x_i, y_i), $i=1 \dots m$, причем их число больше числа неизвестных $(m>k)$. Оценки наименьших квадратов a_j для коэффициентов α_j находят из условия минимальности суммы квадратов отклонений результатов измерений y_i от расчетных значений*

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i-\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi_j(x_i)\right]^2$$

При обосновании метода наименьших квадратов в математической статистике предполагается, что результаты измерений удовлетворяют следующим условиям:

1) значения входных величин известны точно (т. е. погрешности измерений X_i пренебрежимо малы);

2) результаты измерений выходных величин $y_i=Y_i+\varepsilon_i$ содержат случайные погрешности ε_i с нулевым средним и дисперсией $D\varepsilon_i=\sigma^2$;

* Метод наименьших квадратов подробно изложен, например в [1].

2 з. 7080

3) случайные погрешности ε_i имеют нормальные распределения.

При этих условиях оценки наименьших квадратов являются несмещенными ($Ma_j=\alpha_j$) и имеют минимальные дисперсии.

Таким образом, применение метода наименьших квадратов для построения градуировочных характеристик (ГХ) строго обосновано лишь в случае, когда погрешности измерений входных величин и систематические погрешности измерений выходных величин пренебрежимо малы. На практике эти условия не всегда выполнимы, и поэтому необходимо выяснить практические условия применения метода наименьших квадратов.

При наличии погрешностей измерений входных величин оценки наименьших квадратов становятся смещенными, т. е. $Ma_j\neq\alpha_j$. При увеличении числа точек Ma_j не сходятся к истинным значениям α_j. Так, для линейной функции $Y=\alpha+\beta X$ оценка коэффициента преобразования β по методу наименьших квадратов оказывается существенно меньше истинного значения β. В этом случае приходится либо использовать для обработки экспериментальных данных специальные методы (методы конфлюентного анализа), либо так изменить схему проведения эксперимента, чтобы применение метода наименьших квадратов было бы корректным. Однако в наиболее важном на практике случае линейной зависимости измерительный эксперимент часто бывает поставлен (или может быть поставлен) так, что можно применить метод наименьших квадратов. Это случай, когда переменная X является контролируемой [2].

Переменная X контролируема, если экспериментатор может заранее выбрать значения $x_1, ..., x_m$ и затем изменять входную величину так, чтобы последовательно получать при измерениях результаты $x_1, ..., x_m$ (устанавливать прибор на отметки $x_1, ..., x_m$) и при этом измерять соответствующие выходные величины*. Тогда для оценивания параметров линейной зависимости можно использовать метод наименьших квадратов. При этом считают, что погрешности приведены к правой части, т. е.

$$y_i=\alpha+\beta x_i+\zeta_i,$$

где x_i — не содержат погрешностей, а приведенные погрешности $\zeta_i=\zeta_i^y-\beta\zeta_i^x$, имеют дисперсии $\sigma_y^2+\beta^2\sigma_x^2$. Полученные оценки параметров будут несмещенными.

* При измерениях с многократными наблюдениями обычно фиксируется истинное значение X, а результаты наблюдений $x_1, ..., x_n$ группируются около него. В случае контролируемой переменной, наоборот, фиксируется результат наблюдений x, а истинные значения $X_1, ..., X_n$ группируются около него.

При наличии систематических погрешностей измерений выходных величин метод наименьших квадратов используется как удобный численный метод (он не является оптимальным в статистическом смысле, как это было для случайных погрешностей). Оценки параметров и расчетные значения функции при этом содержат систематические погрешности, которые следует учитывать и оценивать.

В статье рассматривается применение метода наименьших квадратов для построения ГХ и оценивание их погрешностей для случая, когда погрешности измерений входных величин пренебрежимо малы (или переменная X является контролируемой), а погрешности измерений выходных величин содержат систематические составляющие.

Построение линейных градуировочных характеристик

Рассмотрим случай, когда зависимость линейна:

$$Y = \alpha + \beta X.$$

При точно известных значениях входных величин $X_1, \ldots, X_m$ выполняются измерения выходных величин $Y_i = \alpha + \beta X_i$.

Наиболее важными являются два основных случая.

1. Равноточные наблюдения (многократные);

в точке Y_i имеем результаты наблюдений

$$y_{ij} = Y_i + \zeta_{ij}^y = Y_i + \vartheta_i^y + \varepsilon_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n_i,$$

где систематическая составляющая θ оценивается границами Θ, случайные погрешности ε_{ij} независимы, имеют $M\varepsilon_{ij} = 0$ и одинаковые дисперсии $D\varepsilon_{ij} = \sigma^2$.

2. Неравноточные наблюдения с известными весами:

результату $y_i = Y_i + \zeta_i^y$ соответствует вес ω_i.

При отсутствии систематических погрешностей обычно предполагается, что дисперсии погрешностей пропорциональны известной функции h: $D\varepsilon = \sigma^2 h(X_i)$ и тогда веса $\omega_i = 1/h(X_i)$. При наличии систематических погрешностей веса назначаются с учетом систематических погрешностей [3].

Важнейшим частным случаем являются однократные равноточные наблюдения, когда все $n_i = 1$ (или все $\omega_i = 1$).

По экспериментальным данным (X_i, y_{ij}) или (X_i, y_i) методом наименьших квадратов строится ГХ, которую удобнее записать в виде
$$\hat{Y}=a_0+b(X-\bar{X}).$$

Ниже приводится вычисление коэффициентов ГХ [1] для случаев 1 и 2.

$$1)\quad a_0=\frac{1}{N}\sum_1^m n_i\bar{y}_i,\quad b=\frac{\Sigma n_i\bar{y}_i(X_i-\bar{X})}{\Sigma n_i(X_i-\bar{X})^2},$$

где
$$\bar{y}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij},\quad \bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^m n_iX_i,\quad N=\sum_{i=1}^m n_i;$$

$$2)\quad a_0=\frac{\Sigma\omega_iy_i}{\Sigma\omega_i};\quad b=\frac{\Sigma\omega_iy_i(X_i-\bar{X})}{\Sigma\omega_i(X_i-\bar{X})^2},$$

где
$$\bar{X}=\Sigma\omega_iX_i/\Sigma\omega_i.$$

Если погрешности измерений случайны, то оценки наименьших квадратов являются несмещенными и имеют дисперсии:

$$1)\quad Da_0=\frac{1}{N}\sigma^2;\quad Db=\sigma^2/\Sigma n_i(X_i-\bar{X})^2;$$
$$2)\quad Da_0=\sigma^2/\Sigma\omega_i;\quad Db=\sigma^2/\Sigma\omega_i(X_i-\bar{X})^2. \qquad (1)$$

По отклонениям результатов измерений y_j от расчетных значений $\hat{Y}_i=a_0+b(X_i-\bar{X})$ можно также оценить дисперсию σ^2:

$$1)\quad s^2=\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{Y}_i)^2;$$
$$2)\quad s^2=\frac{1}{m-2}\sum_{i=1}^m(y_i-\hat{Y}_i)^2/h(X_i). \qquad (2)$$

Выделим частный случай, когда ГХ является прямой, проходящей через начало координат: $Y=bX$. Коэффициент b вычисляется в этом случае по формулам:

$$1)\quad b=\Sigma n_iy_iX_i/\Sigma n_iX_i^2;$$

$$2)\quad b = \Sigma \omega_i y_i X_i \Big/ \Sigma \omega_i X_i^2.$$

Дисперсии этих оценок соответственно равны

$$1)\quad Db = \sigma^2 \Big/ \Sigma n_i X_i^2;$$

$$2)\quad Db = \sigma^2 \Big/ \Sigma \omega_i X_i^2$$

Выше были приведены дисперсии погрешностей при наличии лишь случайных погрешностей. В общем случае погрешности коэффициентов ГХ имеют вид:

$$1)\quad \zeta(a_0) = \frac{1}{N} \sum_1^m n_i \bar{\zeta}_i^y; \qquad \bar{\zeta}_i^y = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_{ij}^y;$$

$$\zeta(b) = \Sigma n_i \bar{\zeta}_i^y (X_i - \bar{X}) \Big/ \Sigma n_i (X_i - \bar{X})^2;$$

$$2)\quad \zeta(a_0) = \Sigma \omega_i \zeta_i^y \Big/ \Sigma \omega_i;$$

$$\zeta(b) = \Sigma \omega_i \zeta_i^y (X_i - \bar{X}) \Big/ \Sigma \omega_i (X_i - \bar{X})^2.$$

Погрешности расчетных значений $\hat{Y}(X)$ равны

$$\zeta[Y(X)] = \zeta(a_0) + \zeta(b)(X - \bar{X}).$$

Если известны лишь границы погрешностей $|\zeta_i^y| \leqslant \Delta_y$, то погрешности параметров можно оценить сверху границами:

$$1)\quad |\zeta(a_0)| \leqslant \Delta_y; \quad |\zeta(b)| \leqslant \Delta_y \Sigma n_i |X_i - \bar{X}| \Big/ \Sigma n_i (X_i - \bar{X})^2;$$

$$2)\quad |\zeta(a_0)| \leqslant \Delta_y; \quad |\zeta(b)| \leqslant \Delta_y \Sigma \omega_i |X_i - \bar{X}| \Big/ \Sigma \omega_i (X_i - \bar{X})^2.$$

Если можно считать погрешности $\zeta_1^y, \ldots, \zeta_m^y$ выборкой из равномерного распределения на $[-\Delta_y, \Delta_y]$, то границы для погрешностей параметров можно оценить из вероятностных соображений. Полагают, что $\zeta(a_0)$ и $\zeta(b)$ — приближенно нормальные случайные величины с нулевыми средними, дисперсии которых определяются выражениями (1) с $\sigma^2 = \frac{\Delta_y^2}{3}$.

Используя разложения погрешностей измерений ζ_i^y на случайные и систематические составляющие, получаем:

$$1)\quad \zeta(a_0) = \frac{1}{N}\Sigma n_i \vartheta_i + \frac{1}{N}\Sigma n_i \bar{\varepsilon}_i = \bar{\vartheta} + \bar{\varepsilon};$$

$$\zeta(b) = \frac{\Sigma n_i \vartheta_i (X_i - \bar{X}) + \Sigma n_i \bar{\varepsilon}_i (X_i - \bar{X})}{\Sigma n_i (X_i - X)^2} = \vartheta_b + \varepsilon_b;$$

$$2)\quad \zeta(a_0) = \left(\Sigma \omega_i \vartheta_i + \Sigma \omega_i \bar{\varepsilon}_i\right) \Big/ \Sigma \omega_i = \bar{\vartheta} + \bar{\varepsilon};$$

$$\zeta(b) = \frac{\Sigma \omega_i \vartheta_i (X_i - \bar{X}) + \Sigma \omega_i \varepsilon_i (X_i - \bar{X})}{\Sigma \omega_i (X_i - \bar{X})^2} = \vartheta_b + \varepsilon_b.$$

Случайные составляющие $\bar{\varepsilon}$ и ε_b имеют нулевые средние, их дисперсии задаются выражениями (1). Систематические составляющие погрешностей можно оценить сверху границами:

$$1)\quad |\bar{\vartheta}| \leqslant \theta; \quad |\vartheta_b| \leqslant \theta \Sigma n_i |X_i - \bar{X}| \Big/ \Sigma n_i (X_i - \bar{X})^2;$$

$$2)\quad |\bar{\vartheta}| \leqslant \theta; \quad |\vartheta_b| \leqslant \theta \Sigma \omega_i |X_i - \bar{X}| \Big/ \Sigma \omega_i (X_i - \bar{X})^2.$$

Обычно такие границы значительно превышают действительные погрешности; иногда оценки систематических погрешностей находят, используя статистические методы [3].

Часто строят доверительные интервалы для коэффициентов α_0 и β истинной зависимости, а также для истинного значения выходной величины $Y = Y(X)$, которые имеют вид:

$$I_\gamma(\alpha_0) = (a_0 - \Delta_a,\ a_0 + \Delta_a);$$

$$I_\gamma(\beta) = (b - \Delta_b,\ b + \Delta_b);$$

$$I_\gamma(Y) = \left(\hat{Y}(X) - \Delta(X),\ \hat{Y}(X) + \Delta(X)\right)$$

Если имеются только случайные погрешности измерений, имеющие приближенно нормальные распределения, то доверительные границы погрешностей Δ_a и Δ_b при доверительной вероятности $1-\gamma$ вычисляются по формулам:

$$1)\quad \Delta_a = \frac{s}{\sqrt{N}}\, t_{N-2}(\gamma); \quad \Delta_b = \frac{s}{\sqrt{\sum n_i (X_i - \bar{X})^2}}\, t_{N-2}(\gamma);$$

$$2)\quad \Delta_a = \frac{s}{\sqrt{\sum \omega_i}}\, t_{m-2}(\gamma); \quad \Delta_b = \frac{s}{\sqrt{\sum \omega_i (X_i - \bar{X})^2}}\, t_{m-2}(\gamma),$$

где $t_k(\gamma)$ — коэффициент Стьюдента с k степенями свободы; s^2 — оценки дисперсий, вычисляемые по формулам (2).

Аналогично вычисляются доверительные границы погрешности:

$$1)\quad \Delta(X) = s\, t_{N-2}(\gamma) \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum n_i (X_i - \bar{X})^2}};$$

$$2)\quad \Delta(X) = s\, t_{m-2}(\gamma) \sqrt{\frac{1}{\sum \omega_i} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum \omega_i (X_i - \bar{X})^2}}.$$

При наличии систематических погрешностей можно построить лишь приближенные доверительные границы для погрешностей коэффициентов. Если в каждой точке выполняются многократные наблюдения, то, следуя [3], за доверительные границы погрешностей можно принять:

$$\Delta_a = \frac{\Delta_\theta + \Delta_\varepsilon}{s_\theta + s_\varepsilon} \sqrt{s_\theta^2 + s_\varepsilon^2}, \quad \Delta_b = \frac{\Delta_{\theta b} + \Delta_{\varepsilon b}}{s_{\theta b} + s_{\varepsilon b}} \sqrt{s_{\theta b}^2 + s_{\varepsilon b}^2}.$$

При этом оценки дисперсий составляющих $\bar{\varepsilon}$ и ε_b будут

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} s^2; \quad s_{\varepsilon b}^2 = \frac{s^2}{\sum n_i (X_i - \bar{X})^2},$$

где

$$s^2 = \frac{1}{N - m - 2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2,$$

а составляющих $\bar{\theta}$ и θ_b

$$s_\theta^2 = \frac{1}{3m} \sum_1^l \theta_j^2, \quad s_{\theta b}^2 = \frac{\sum_1^l \theta_j^2}{3 \sum_1^m n_i (X_i - \bar{X})^2}$$

Доверительные границы составляющих вычисляются при той же доверительной вероятности $1-\gamma$:

$$\Delta_{s}=t_{N-m-2}(\gamma)s, \quad \Delta_{cb}=s\,t_{N-m-2}(\gamma)\Big/\sqrt{\Sigma n_i(X_i-\bar{X})^2}$$

$$\Delta_{\bar{s}}=z(\gamma)s_{\bar{s}}, \quad \Delta_{\sigma b}=z(\gamma)s_{\sigma b},$$

где $z(\gamma)$ — квантиль стандартного нормального распределения (считаем, что общее число наблюдений $lm>5$ [3]).

Иногда появляется необходимость проверить гипотезу о том, что построенная ГХ удовлетворительно описывает экспериментальные данные, т. е. функциональный вид ГХ выбран правильно. Если линейная ГХ построена с использованием многократных наблюдений, причем погрешности наблюдений можно считать случайными, с приближенно нормальными распределениями, то для проверки гипотезы о линейной зависимости используют дисперсионное отношение

$$v^2=\frac{(N-m)\sum_{1}^{m}n_i(y_i-\hat{Y}_i)^2}{(m-2)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}$$

Полученное значение сравнивают с критическим v_γ^2, найденным для выбранного уровня значимости γ по таблицам распределения Фишера с $m-2$ и $N-m$ степенями свободы. Если $v^2>v_\gamma^2$, то гипотеза о линейной зависимости отвергается, и следует искать ГХ более сложного вида.

В некоторых случаях приходится сравнивать построенную ГХ с номинальной (типовой) ГХ. Для этого сравнивают суммы квадратов отклонений экспериментальных значений y_i (или $\bar{y}_i$) от расчетных $\hat{Y}_i$ и Y_i^0, полученных согласно построенной и номинальной ГХ:

$$1)\quad S_1^2=\sum_{1}^{m}n_i(\bar{y}_i-\hat{Y}_i)^2, \quad S_2^2=\sum_{1}^{m}n_i(\bar{y}_i-Y_i^0)^2;$$

$$2)\quad S_1^2=\sum_{1}^{m}\omega_i(y_i-\hat{Y}_i)^2, \quad S_2^2=\sum_{1}^{m}\omega_i(y_i-Y_i^0)^2$$

Дисперсионное отношение

$$v^2=\frac{(m-2)(S_2^2-S_1^2)}{2S_1^2}$$

сравнивают с критическим значением v_γ^2, найденным для уровня значимости γ по таблицам распределения Фишера с 2 и $m-2$ степенями свободы. Если $v^2 < v_\gamma^2$, то полученная ГХ удовлетворительно согласуется с номинальной.

Построение нелинейных зависимостей, приводимых к линейным

Из нелинейных зависимостей на практике наиболее распространены дробно-линейные, показательные, степенные и логарифмические зависимости. Такие зависимости можно привести к линейным путем замены переменных (см. таблицу).

Зависимости	Замена переменной	Полученная линейная функция
1. Дробно-линейные		
а) $Y=\alpha+\frac{\beta}{X}$	$\tilde{X}=\frac{1}{X}$	$Y=\alpha+\beta\tilde{X}$
б) $Y=\frac{1}{\alpha+\beta X}$	$\tilde{Y}=\frac{1}{Y}$	$\tilde{Y}=\alpha+\beta X$
в) $Y=\frac{X}{\alpha+\beta X}$	$\tilde{X}=\frac{1}{X}$, $\tilde{Y}=\frac{1}{Y}$	$\tilde{Y}=\beta+\alpha\tilde{X}$
2. Показательные		
а) $Y=\alpha e^{\beta X}$	$\tilde{Y}=\ln Y$	$\tilde{Y}=\ln\alpha+\beta X$
б) $Y=\alpha e^{\beta/X}$	$\tilde{X}=\frac{1}{X}$, $\tilde{Y}=\ln Y$	$\tilde{Y}=\ln\alpha+\beta\tilde{X}$
3. Степенная		
$Y=\alpha X^{\beta}$, $\beta\neq 1$	$\tilde{X}=\ln X$, $\tilde{Y}=\ln Y$	$\tilde{Y}=\ln\alpha+\beta\tilde{X}$
4. Логарифмическая		
$Y=\alpha+\beta\ln X$	$\tilde{X}=\ln X$	$Y=\alpha+\beta\tilde{X}$

Полученную линейную зависимость можно построить по экспериментальным данным $(\tilde{X}_i, \tilde{y}_i)$ методом наименьших квадратов. Если исходные результаты y_i равноточные и произведена замена переменных $\tilde{Y}=\varphi(Y)$, то при вычислении коэффициентов прямой необходимо ввести веса $\omega_i=\left|\varphi'(y_i)\right|^{-2}$. Например, для показательной функции $Y=\alpha e^{\beta X}$ выполняют логарифмическую замену $\tilde{Y}=\ln Y$. Поэтому для оценивания прямой $\tilde{Y}=\tilde{\alpha}+\beta X$ по результатам $(X_i, \tilde{y}_i=\ln y_i)$ берут веса $\omega_i=y_i^2$.

Оценивание погрешностей и построение доверительных интервалов выполняется для величин $\tilde{Y}=\varphi(Y)$ так же, как описано выше. Если для $\tilde{Y}_0=\varphi(Y_0)$ в точке X_0 построен доверительный интервал $\tilde{Y}_1<\tilde{Y}_0<\tilde{Y}_2$, то путем обратного преобразования $Y=\varphi^{-1}(\tilde{Y})$ получают доверительный интервал для исходной величины Y_0: $\varphi^{-1}(\tilde{Y}_1)<Y_0<\varphi^{-1}(\tilde{Y}_2)$ с той же доверительной вероятностью.

Построение полиномиальных зависимостей

Предположим, что ГХ представлена полиномом

$$Y=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j X^j$$

(обычно степень полинома невысока: $k=2...5$). Пусть имеются экспериментальные данные (X_i, y_i), $i=1 \ldots m$, причем результат y_i имеет вес ω_i.

Удобнее использовать разложение по ортогональным полиномам

$$Y=\sum_{j=0}^{k}\beta_j p_j(X),$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_k$ — полиномы степеней 0, 1, ..., k, удовлетворяющие условию ортогональности при $j \neq l$

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i p_j(X_i)p_l(X_i)=0$$

Тогда оценки наименьших квадратов для коэффициентов β_j имеют вид

$$b_j=\frac{\sum_{i=1}^{m}\omega_i y_i p_j(X_i)}{\sum_{i=1}^{m}\omega_i p_j^2(X_i)}$$

Приведем ортогональные полиномы младших степеней:

$$p_0(X)=1; \quad p_1(X)=X-\bar{X}, \quad \bar{X}=\Sigma\omega_i X_i \Big/ \Sigma\omega_i;$$

$$p_2(X)=(X-\bar{X})^2-\frac{\Sigma\omega_i(X_i-\bar{X})^3}{\Sigma\omega_i(X_i-\bar{X})^2}(X-\bar{X})-\frac{\Sigma\omega_i(X_i-\bar{X})^2}{\Sigma\omega_i},$$

Далее они вычисляются по рекуррентным формулам [4].

Рассмотрим частный случай, когда измерения равноточные ($\omega_i=1$), а значения $X_1, \ldots, X_m$ расположены симметрично относительно их среднего $\bar{X}$. Тогда ортогональные полиномы

$$p_1(X)=X-\bar{X}; \quad p_2(X)=(X-\bar{X})^2-\frac{1}{m}\sum_{1}^{m}(X_i-\bar{X})^2;$$

$$p_3(X)=(X-\bar{X})^3-\left[\frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{m}-\frac{\Sigma p_2^2(X_i)}{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}\right](X_i-\bar{X}).$$

Если при этом значения $\bar{X}_i$ выбраны равноотстоящими с шагом h, то обычно делают замену переменной $u=(X-\bar{X})/h$. Тогда коэффициенты ГХ $Y=\Sigma b_j p_j(u)$ будут $b_j=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} y_i p_j(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} p_j^2(u_i)}$, где ортогональные полиномы имеют вид:

$$p_1(u)=u;\quad p_2(u)=u^2-\frac{1}{12}(m^2-1);$$

$$p_3(u)=u^3-\frac{1}{20}(3m^2-7)u.$$

Для небольшого числа точек m в [4] приведены коэффициенты и таблицы значений ортогональных полиномов.

Если погрешности измерений являются случайными, то оценки b_j имеют средние $Mb_j=\beta_j$ и дисперсии

$$Db_j=\sigma^2\Big/\sum_{i=1}^{m}\omega_i p_j^2(X_i).$$

В общем случае погрешности коэффициентов ГХ имеют вид

$$\zeta(b_j)=\frac{\sum_i\omega_i\zeta_i p_j(X_i)}{\sum_i\omega_i p_j^2(X_i)}.$$

Погрешности расчетных значений $\hat{Y}=\sum_{j=0}^{k}b_j p_j(X)$ составляют

$$\zeta[Y(X)]=\sum_{j=0}^{k}\zeta(b_j)p_j(X)$$

Оценивание погрешностей $\zeta\ (b_j)$ выполняется так же, как и для линейной зависимости.

На основании изложенного выше можно сделать следующие выводы:

1) при построении ГХ необходимо определить на основе сведений о погрешностях измерений входных и выходных величин, применим ли метод наименьших квадратов;

2) если метод наименьших квадратов неприменим, то измерительный эксперимент следует поставить так, чтобы получить дополнительную информацию, необходимую для применения одного из методов конфлюентного анализа;

3) для случайных погрешностей коэффициентов ГХ (или расчетных значений ГХ) целесообразно указывать вторые моменты относительно коэффициентов (или значений) истинной функции преобразования; можно также строить доверительные интервалы для коэффициентов или значений;

4) при наличии систематической погрешности измерений полученные коэффициенты ГХ также содержат систематические погрешности, которые задаются выражениями, аналогичными

выражениям для случайных погрешностей. Доверительные границы для суммарных погрешностей строят, используя статистический метод суммирования случайных и систематических погрешностей.

Приложение

Примеры построения градуировочных характеристик.

Рассмотрим несколько примеров построения ГХ. Эти примеры подобраны для иллюстрации методики решения задачи, и поэтому максимально просты.

1. Построение линейной ГХ. Рассмотрим экспериментальные данные, полученные при градуировке вольтметра постоянного тока*. Требуется построить линейную ГХ.

При градуировке на входе прибора устанавливают напряжение переменного тока $X_i = i \cdot 0{,}2$ В, $i = 1 \ldots 5$ с погрешностью не более 0,002%; напряжение постоянного тока на выходе измеряют с погрешностью не более 0,005%. Результаты измерений приведены в табл. 1 (измерения выполняются с многократными наблюдениями, и потому указано число наблюдений n_i и оценки дисперсий s_i^2).

Таблица 1

Результаты измерений при градуировке вольтметра

X_i	n_i	y_i	$S_i^2 \cdot 10^{10}$	$\hat{Y}_i$
0,2	25	0,199946	8,55	0,200008
0,4	25	0,400023	4,46	0,400017
0,6	25	0,600071	4,31	0,600026
0,8	25	0,800062	2,82	0,800035
1,0	50	1,000024	2,72	1,000044

Поскольку входная величина является контролируемой переменной, можно для построения линейной ГХ применять метод наименьших квадратов. Вычисляя коэффициенты линейной ГХ

с весами $\omega_i = n_i / s_i^2$, получаем $Y = 1{,}00004\,X$.

Полученные расчетные значения $\hat{Y}_i$ также приведены в табл. 1.

Для данного преобразователя желательный (номинальный) коэффициент преобразования $b_0 = 1$. Выясним, значимо ли отличие полученного коэффициента $b = 1{,}00004$ от номинального.

* **Б. С. Таубе.** Разработка и исследование методов и средств высокой точности для автоматического измерения действующего и среднего значения переменного напряжения. Автореф. дис., Л., ВНИИМ, 1972.

Как обычно, примем уровень значимости 0,05 и вычислим длину доверительного интервала, соответствующего вероятности 0,95

$$\Delta(b) = t_3(0{,}05)\sqrt{\frac{\Sigma\omega_i(y_i-\hat{Y}_i)^2}{3\Sigma\omega_i(X_i-\bar{X})^2}} = 2{,}1\cdot10^{-4}.$$

Поскольку $|b-b_0| = 4\cdot10^{-5} < \Delta(b)$, то отличие b от b_0 явно незначимо.

Сравним построенную ГХ с номинальной ГХ $Y^\circ = X$. В данном случае дисперсионное отношение

$$v^2 = \frac{3(S_2^2 - S_1^2)}{2S_1^2} = 1{,}97,$$

что не превышает критического значения $F_{0{,}05}$ (2,3) = 9,55, найденного по таблицам распределения Фишера с 2 и 3 степенями свободы для уровня значимости 0,05. Таким образом, экспериментальная ГХ удовлетворительно согласуется с номинальной.

2. Построение нелинейной зависимости, приводимой к линейной. При исследовании «самопоглощения» радиевых γ-источников строят эмпирическую зависимость*

$$R = 1 + a\sqrt[3]{M-1{,}317} + b(M-1{,}317)$$

где M — масса радия в источнике (без поправки на «самопоглощение»), R — отношение масс радия, полученных с помощью калориметрических и ионизационных измерений.

Параметры a и b определяют по результатам измерений M_i и R_i, которые приведены в табл. 2. Относительные погрешности

Таблица 2

Результаты измерений и вычисление параметра a

M_i	R_i	X_i	$y_i\cdot10^3$	$y_iX_i\cdot10^3$	X_i^2	$\hat{Y}_i=aX_i$	$\Delta y_i\cdot10^3$
1	2	3	4	5	6	7	8
1,1620	0,99517	−0,537	−4,83	2,595	0,288	−2,514	−2,32
1,3170	1,00000	0	0	0	0	0	0
2,9610	1,00754	1,180	7,54	8,890	1,393	5,523	2,02
6,2320	1,00784	1,700	7,84	13,330	2,891	7,957	−0,12

* **А. Ф. Дричко, Ф. М. Караваев и др.** Определение поправки на «самопоглощение» для радиевых γ-источников. — Труды метрологических институтов СССР, 1970, вып. 124 (184).

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
10,825	1,01077	2,118	10,77	22,816	4,488	9,914	0,86
10,896	1,01063	2,124	10,63	22,576	4,510	9,939	0,69
25,092	1,01453	2,876	14,53	41,781	8,268	13,457	1,07
25,389	1,01452	2,887	14,52	41,925	8,337	13,513	1,01
90,843	1,01925	4,474	19,25	86,113	20,012	20,936	−1,69
96,736	1,02004	4,570	20,04	91,575	20,881	21,386	−1,35
196,38	1,02852	5,800	28,52	165,402	33,634	27,142	1,38
198,03	1,02602	5,816	26,02	151,327	33,824	27,218	−1,20

измерений M и абсолютные погрешности измерений R примерно постоянны в рассматриваемых диапазонах и характеризуются СКО соответственно не более $2\cdot 10^{-3}$ и $3\cdot 10^{-3}$.

В данном случае зависимость $R(M)$ приводится к полиному

$$Y = aX + bX^3,$$

где $$Y = R - 1, \quad X = \sqrt[3]{M - 1{,}317}.$$

Прежде всего аппроксимируем требуемую зависимость линейной

$$Y = aX$$

Для оценивания линейной зависимости можно использовать метод наименьших квадратов, так как данный случай близок к случаю контролируемой переменной. Чтобы определить веса, выясним, как изменяется по диапазону погрешность, приведенная к правой части: $z_i = \zeta_y + a\zeta_x$. Предварительный анализ отношений y_i / x_i показывает, что коэффициент a близок к $5\cdot 10^{-3}$. Поскольку абсолютные погрешности ζ_y и ζ_x имеют в точке X СКО примерно $3\cdot 10^{-3}$ и $1\cdot 10^{-3}\ X$, то СКО погрешностей z_i примерно одинаковы, и потому веса $\omega_i = 1$.

Коэффициент $a = \dfrac{\Sigma y_i x_i}{\Sigma x_i^2} = 4{,}68 \cdot 10^{-3}$

Вычисления этого коэффициента, а также расчетные значения

$\hat{Y}_i = aX_i$ и их отклонения от экспериментальных значений

$\Delta y_i = y_i - \hat{Y}_i$ приведены в табл. 2.

Анализ отклонений Δy_i показывает, что экспериментальные данные y_i удовлетворительно аппроксимируются полученной линейной зависимостью $Y = aX$, и поэтому ее усложнение в данном случае нецелесообразно.

Используя построенную зависимость, можно вычислить оценку СКО погрешностей z:

$$s(z) = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{Y}_i)^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3},$$

а также СКО полученного коэффициента

$$s(a) = \frac{s(z)}{\sqrt{\Sigma X_i^2}} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.

2. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973.

3. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений. М.-Л., Энергия, 1978.

4. **Румшинский Л. З.** Математическая обработка результатов эксперимента. М., Наука, 1971.

Поступила в редакцию
6/VI 1979 г.

УДК 519.28:512.86

Т. Н. СИРАЯ

МЕТОДЫ КОНФЛЮЕНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

При построении функциональных зависимостей $Y=f(X)$ в случаях, когда погрешности измерений величин X и Y имеют одинаковый порядок, метод наименьших квадратов часто оказывается некорректным [1, 2]. В математической статистике для этих случаев разработаны специальные методы, получившие название «методы конфлюентного анализа». Многие из этих методов целесообразно применять в измерительной практике.

В статье кратко излагаются основные методы конфлюентного анализа и условия их применения. Рассматривается наиболее важная на практике линейная зависимость

$$Y=\alpha+\beta X.$$

При изложении математических методов конфлюентного анализа предполагается, что результаты измерений (x_i, y_i), $i=1...m$, содержат лишь случайные погрешности*:

$$x_i=X_i+\nu_i, \quad y_i=Y_i+\varepsilon_i,$$

причем погрешности независимы между собой, $\nu_1, ..., \nu_m$, а также $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ — одинаково распределены, имеют нулевые средние и дисперсии $D\nu_i=\sigma_x^2$, $D\varepsilon_i=\sigma_y^2$.

* Некоторые замечания о точности оценок конфлюентного анализа при наличии систематических погрешностей приводятся в статье С. Г. Рабиновича и Т. Н. Сирой «Основные задачи, связанные с построением градуировочных характеристик измерительных преобразователей» (см. настоящий сборник, стр. 33).

Условия применения методов конфлюентного анализа

Характерно то, что при применении методов конфлюентного анализа, кроме результатов измерений (x_i, y_i), $i=1...m$, необходима дополнительная информация. В соответствии с видом этой информации определяется метод конфлюентного анализа. В измерительной практике наиболее важными являются следующие случаи [3]:

1) известна одна из дисперсий погрешностей: σ_x^2 либо σ_y^2, или отношение дисперсий $\lambda=\sigma_y^2/\sigma_x^2$;

2) измерения X_i и Y_i выполняются с многократными наблюдениями;

3) имеется критерий, позволяющий сгруппировать или упорядочить результаты измерений переменной X независимо от их погрешностей.

Эти случаи нередко встречаются на практике. Иногда имеются оценки параметров, необходимых в первом случае, полученные независимо от данного набора результатов измерений. Особый интерес представляет третий случай, так как измерения часто выполняются с однократными наблюдениями, а условия такого вида следуют из физических условий постановки эксперимента.

При наличии только погрешностей измерений Y оценки наименьших квадратов обладают оптимальными свойствами: они несмещенные и имеют наименьшие дисперсии. При наличии погрешностей обоих переменных X и Y для коэффициентов линейной зависимости вообще неизвестны простые несмещенные оценки. Можно лишь строить состоятельные оценки, для которых при увеличении числа измерений $m \longrightarrow \infty$ имеется сходимость по вероятности $a \longrightarrow \alpha$, $b \longrightarrow \beta$. При этом для сравнения различных оценок, кроме дисперсии $Db=M(b-Mb)^2$, необходимо также указывать смещение оценки $B(b)=Mb-\beta$. Иногда целесообразно использовать второй момент относительно истинного значения параметра

$$e(b)=M(b-\beta)^2=Db+[B(b)]^2.$$

При построении линейной зависимости наибольший интерес представляет оценивание коэффициента β. Именно с ним и связаны основные трудности во всех методах. Если построена оценка β, то ей соответствует оценка параметра α:

$$a=\bar{y}-b\bar{x}.$$

Если оценка b состоятельна, то соответствующая оценка a также состоятельна. Поэтому далее будем рассматривать лишь оценки коэффициента β.

Оценивание зависимости при известной дисперсии одной из погрешностей либо отношении дисперсий

В случаях, когда известна дисперсия одной из погрешностей либо ее оценка, полученная независимо от имеющихся результатов измерений, состоятельные оценки коэффициентов являются модификациями оценок наименьших квадратов с учетом известного параметра.

Интересен случай, когда известно отношение дисперсий погрешностей $\lambda=\sigma_y^2/\sigma_x^2$ (или его оценка). Состоятельная оценка прямой в этом случае является обобщением прямой ортогональной регрессии [2, 3].

Обозначим через S_x^2, S_y^2 и S_{xy} суммы вида:

$$S_x^2=\frac{1}{m-1}\sum_1^m(x_i-\bar{x})^2,\quad S_y^2=\frac{1}{m-1}\sum_1^m(y_i-\bar{y})^2,$$

$$S_{xy}=\frac{1}{m-1}\sum_1^m(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$$

Если известна дисперсия σ_x^2 погрешности измерения переменной X, то можно использовать оценку

$$b_1=\frac{S_{xy}}{S_x^2-\sigma_x^2}. \qquad (1)$$

Если известна дисперсия σ_y^2 погрешности Y, то применяют оценку

$$b_2=\frac{S_y^2-\sigma_y^2}{S_{xy}}. \qquad (2)$$

Эти оценки состоятельны, если при увеличении числа измерений выполняется условие*

$$\tau_m=\frac{1}{m-1}\sum_1^m(X_i-\bar{X})^2\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\tau>0. \qquad (3)$$

Дисперсии оценок b_1 и b_2 при больших m примерно такие же, как и у обыкновенной оценки наименьших квадратов

$$b_0=S_{xy}/S_x^2.$$

Однако в отличие от b_0, оценки b_1 и b_2 состоятельны и асимптотически не смещены, т. е. при $m\to\infty$ $Mb_1\to\beta$ и $Mb_2\to\beta$. Заме-

---

* Смысл этого условия состоит в том, что с увеличением числа точек не происходит их концентрация вблизи одной точки.

тим, что при $\sigma_x^2 \to 0$ оценка b_1 переходит в оценку наименьших квадратов b_0.

Если известна оценка дисперсии одной из погрешностей, то ее можно подставить в выражение для оценки b_1 или b_2; при условии (3) также получатся состоятельные оценки коэффициента β.

Рассмотрим случай, когда известно отношение дисперсий погрешностей. Если погрешности v_i и ε_i имеют нормальные распределения, то оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{b} = \frac{S_y^2 - \lambda S_x^2 + \sqrt{(S_y^2 - \lambda S_x^2)^2 + 4\lambda S_{xy}^2}}{2S_{xy}} .$$

Эта оценка состоятельна при том же условии (3). При нормальных распределениях погрешностей она является наилучшей, но ее используют и при других распределениях.

Оценку $\hat{b}$ иногда записывают в таком виде:

$$\hat{b} = v \pm \sqrt{v^2 + \lambda} ,$$

где $v = (S_y^2 - \lambda S_x^2)/2S_{xy}$, а знак перед корнем совпадает со знаком S_{xy}. Эту оценку можно было бы получить формально, минимизируя взвешенную сумму квадратов отклонений

$$Q = \sum_{i=1}^{m} w(b)[y_i - a - bx_i]^2 ,$$

где веса $w(b) = (\lambda + b^2)^{-1}$.

При $\lambda = 1$ это условие означает, что сумма квадратов расстояний на плоскости от точек (x_i, y_i) до прямой $y = a + bx$ минимальна. Таким образом, при $\lambda = 1$ построена прямая ортогональной регрессии. Поэтому в общем случае $\hat{b}$ можно назвать обобщенной оценкой ортогональной регрессии.

Прямые ортогональной регрессии редко применяются на практике; причина этого заключается в том, что построение прямых зависит от выбора масштаба по осям x, y [1]. Однако введение параметра λ устраняет этот недостаток и позволяет применять обобщенные прямые ортогональной регрессии.

Заметим, что если формально применить метод наименьших квадратов, рассматривая в качестве аргумента сначала переменную X, а затем Y, то для полученных двух оценок b_x и b выполняется неравенство

$$|b_x| \leq |\hat{b}| \leq |b_y| .$$

т. е. обобщенная прямая ортогональной регрессии лежит между двумя прямыми, построенными методом наименьших квадратов.

Если известна лишь оценка отношения дисперсий, то, подставив ее в выражение для оценки $\hat{b}$, получим состоятельную оценку.

После того как найдена оценка β, можно оценить также отдельные дисперсии погрешностей. Состоятельными являются следующие оценки

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{m}{m-2}\,\frac{S_y^2 - 2\hat{b}S_{xy} + \hat{b}^2 S_x^2}{\lambda + \hat{b}^2}; \quad \hat{\sigma}_y^2 = \lambda \hat{\sigma}_x^2 .$$

Иногда вместо коэффициента β удобнее рассматривать угол наклона прямой φ, определяемый условием $\mathrm{tg}\varphi = \beta/\sqrt{\lambda}$. Оценка для угла φ находится из условия

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\sqrt{\lambda}\,S_{xy}}{|\lambda S_x^2 - S_y^2|} .$$

Для угла φ нетрудно построить и доверительные интервалы. При доверительной вероятности $1-2\gamma$ границы интервала задаются выражением $\hat{\varphi} \pm \frac{1}{2}\arcsin\left[L t_{m-2}(\gamma)\right]$,

где

$$L = 2\sqrt{\frac{\lambda}{m-2}}\sqrt{\frac{S_x^2 S_y^2 - S_{xy}^2}{(\lambda S_x^2 - S_y^2)^2 + 4\lambda S_{xy}^2}} ,$$

$t_{m-2}(\gamma)$ — квантиль порядка $1-\gamma$ распределения Стьюдента с $m-2$ степенями свободы.

Доверительный интервал (φ_1, φ_2), построенный при доверительной вероятности 0,95, можно использовать для приближенной оценки дисперсии $\hat{b}$:

$$\sigma^2(\hat{b}) \approx \frac{\lambda}{4}\max\left[(\mathrm{tg}\,\varphi_2 - \mathrm{tg}\,\hat{\varphi})^2, (\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\hat{\varphi})^2\right] .$$

Построение линейной зависимости по результатам многократных наблюдений

Предположим, что измерения значений X_i и Y_i, $i=1...m$, выполняются с многократными наблюдениями, т. е. имеются результаты наблюдений:
в точке X_i

$$x_{ij} = X_i + v_{ij}, \quad j = 1 \ldots r_i .$$

в точке Y_i

$$y_{ij}=Y_i+\varepsilon_{ij}\ ,\ j=1\ldots n_i\quad .$$

Как и ранее, погрешности наблюдений ε_{ij}, ν_{ij} считаем независимыми между собой, имеющими нулевые средние и дисперсии $D\nu_{ij}=\sigma_x^2$, $D\varepsilon_{ij}=\sigma_y^2$.

Для получения состоятельных оценок прямой в этом случае используют методы дисперсионного анализа [2, 3]. Средние суммы квадратов, обусловленные отклонениями наблюдений внутри групп от их средних, используются для оценивания дисперсий погрешностей σ_x^2 и σ_y^2. Суммы квадратов, обусловленные межгрупповыми отклонениями, используются для вычисления оценок, аналогичных ранее приведенным.

Суммы квадратов представлены в виде дисперсионной таблицы (см. стр. 43). Через $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$ обозначены средние значения по группам:

$$\bar{x}_i=\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}\ ,\qquad \bar{y}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij}\ ,$$

а через $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{\bar{y}}$ — общие средние:

$$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{R}\sum_i\sum_j x_{ij}\ ,\quad \bar{\bar{y}}=\frac{1}{N}\sum_i\sum_j y_{ij}\ ,$$

где $R=\sum\limits_1^m r_i$ и $N=\sum\limits_1^m n_i$ — общее число наблюдений для переменных X и Y.

Можно использовать оценки, аналогичные (1) и (2):

$$b_1=\frac{S_{xy}}{S_x^2-W_x}\ ,\qquad b_2=\frac{S_y^2-W_y}{S_{yx}}\quad .$$

Далее рассмотрим наиболее распространенный случай, когда числа наблюдений для переменных X и Y пропорциональны, т. е. $n_i=kr_i$. Тогда можно использовать оценку

$$b_3=\pm\sqrt{\frac{S_y^2-W_y}{k(S_x^2-W_x)}}\ ,$$

причем знак совпадает со знаком S_{xy}.

Как уже указывалось, при известном отношении дисперсий используется обобщенная оценка ортогональной регрессии. В данном случае, оценив это отношение $\hat{\lambda}=W_y/W_x$, получим аналогичную оценку коэффициента β:

$$\hat{b}=v\pm\sqrt{v^2+\hat{\lambda}/k}\quad .$$

где $\quad v=(S_y^2-\hat{\lambda}S_x^2)/(2kS_{xy})$.

Приведенные выше оценки состоятельны, если число точек $m\to\infty$ и хотя бы для одной точки число наблюдений $r_i\to\infty$, а сумма квадратов $S_x^2\to c>0$. Оценки b_1, b_2 и b_3 близки к обычной оценке наименьших квадратов $b_0=S_{xy}/S_x^2$. Асимптотически они имеют примерно такие же дисперсии, как и b_0. Однако в данном случае оценка b_0 не состоятельна, а оценки b_1, b_2 и b_3 состоятельны и асимптотически не смещены.

Если сравнивать оценки b_1, b_2, b_3 и $\hat{b}$ более детально, то наилучшей из них окажется обобщенная оценка ортогональной регрессии $\hat{b}$. При сравнении оценок b_1, b_2 и b_3 используется параметр $\gamma=\sigma_y^2/b^2\sigma_x^2$ (его можно оценить на основе графического анализа результатов наблюдений). Если параметр γ близок к 1, то лучше b_3, если мал — b_2, если велик — b_1.

Рассмотренные оценки используются при большом числе точек m. Если же m мало, то целесообразнее использовать дробно-линейную оценку

$$b=\frac{\sum_1^m r_i\bar{y}_i(R-2R_i+r_i)}{\sum_1^m r_i\bar{x}_i(R-2R_i+r_i)}, \qquad R_i=\sum_{j=1}^{i} r_j$$

(предполагается, что $n_i=kr_i$). В частности, при одинаковом числе наблюдений во всех точках ($r_i=n_i=n$) имеем

$$b=\frac{\sum_1^m \bar{y}_i(m+1-2i)}{\sum_1^m \bar{x}_i(m+1-2i)}. \qquad (4)$$

Такие оценки состоятельны, если по крайней мере для двух значений i число наблюдений $r_i\to\infty$ (не требуется, чтобы число точек $m\to\infty$).

Дробно-линейные оценки часто используют, если многократные наблюдения выполняются только в двух точках ($m=2$); тогда

$$b=\frac{r_2\bar{y}_1-r_1\bar{y}_2}{r_2\bar{x}_1-r_1\bar{x}_2},$$

а при равном числе наблюдений $r_1=r_2$

$$b=\frac{\bar{y}_1-\bar{y}_2}{\bar{x}_1-\bar{x}_2}.$$

Такие же оценки, но при другой априорной информации, подробно рассматриваются ниже.

Построение линейной зависимости при группировке или упорядочении результатов измерений входной величины

Наиболее интересен случай, когда выполняются однократные наблюдения, но доступна следующая дополнительная информация [2, 3]): имеется правило разбиения результатов измерений входных величин на группы независимо от их погрешностей либо известен порядок возрастания истинных значений входных величин: $X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots \leqslant X_m$.

В частности, порядок возрастания входных величин может быть задан заранее (например, опыт ставится так, что переменная X возрастает) либо известно, что погрешности измерений входных величин достаточно малы и не могут изменить их порядок возрастания (если расположить результаты измерений x_i в порядке возрастания, то истинные значения X_i также возрастают).

При наличии правила группировки результаты измерений разбивают на две или три группы и применяют оценки Вальда или Бартлетта [2].

Если число точек четное $m=2l$ и все результаты разбиты на две группы по l в каждой, то оценка Вальда вычисляется по формуле

$$b=\frac{y^{I}-y^{II}}{x^{I}-x^{II}}, \tag{5}$$

где через x^{I} и y^{I} обозначены суммы результатов измерений входной и выходной величин для первой группы, а x^{II} и y^{II} — для второй группы. Если при увеличении числа точек $m \longrightarrow \infty$ истинные значения X_i удовлетворяют условию

$$\frac{1}{m}\left|X^{I}-X^{II}\right| \geqslant c>0, \tag{6}$$

то оценка Вальда состоятельна.

Аналогично, если $m=3l$ и результаты разбиты на три группы по l в каждой, то одну группу, соответствующую средним значениям X_i, отбрасывают и вычисляют суммы x^{I} и y^{I}, x^{II} и y^{II} по двум оставшимся группам. Оценка Бартлетта также вычисляется по формуле (5) и состоятельна при том же условии (6).

Если известен порядок истинных значений $X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_m$, то можно рассмотреть более общие дробно-линейные оценки

$$b=\frac{\sum_{1}^{m} w_i y_i}{\sum_{1}^{m} w_i x_i},$$

где w_i — постоянные веса, причем $\sum\limits_1^m w_i = 0$.

Оценки Вальда и Бартлетта являются частными случаями таких оценок; для них веса w_i равны ± 1 или 0. При разбиении в этом случае в первую группу входят результаты, которые отвечают меньшим значениям X_i, а в последнюю — отвечающие большим значениям X_i.

Рассмотрим вопрос о точности дробно-линейных оценок. Смещение оценки имеет вид:

$$B(b) = Mb - \beta \approx \beta \sigma_x^2 \frac{W^2}{[W(X)]^2},$$

где $W^2 = \sum\limits_1^m w_i^2, \; W(X) = \sum\limits_1^m w_i X_i$.

Второй момент оценки b относительно истинного значения параметра β (с точностью до порядка $1/m^2$) имеет вид:

$$e(b) = M(b-\beta)^2 \approx \frac{W^2}{[W(X)]^2}(\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2).$$

Таким образом, дробно-линейные оценки асимптотически не смещены и состоятельны, так как при $m \longrightarrow \infty \; B(b) \longrightarrow 0$, $e(b) \longrightarrow 0$. Предполагается, что все значения X_i расположены в конечном диапазоне и $\sum w_i X_i \neq 0$.

Оптимальные веса w_i, дающие минимум $e(b)$, зависят от истинных значений X_i и обычно неизвестны. При равноотстоящих значениях X_i наилучшей является оценка Хаузнера-Бреннана:

$$b_H = \frac{\sum\limits_1^m y_i(m+1-2i)}{\sum\limits_1^m x_i(m+1-2i)}.$$

Эта оценка предпочтительна и в том практически важном случае, когда значения X_i расположены примерно равномерно в диапазоне изменения входной величины. Если же они группируются около двух точек, то предпочтительной является оценка Вальда.

Оценки Хаузнера-Бреннана удобны и для того случая, когда все точки разбиты на m групп равных объемов; тогда вместо x_i и y_i подставляют средние значения по группам. В частности, при измерениях с многократными наблюдениями и одинаковым числом наблюдений во всех точках получается оценка (4); группа в этом случае состоит из результатов наблюдений в одной точке X_i.

Оценки дисперсий погрешностей, вычисленные по формулам:

$$\hat{\sigma}_x^2 = S_x^2 - \frac{1}{b} S_{xy}, \quad \hat{\sigma}_y^2 = S_y^2 - b S_{xy},$$

где $S_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_1^m (x_i - \bar{x})^2$, $S_{xy} = \frac{1}{m-1} \sum_1^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$,

имеют невысокую точность.

Проверка гипотезы о линейной зависимости

При наличии погрешностей измерений входных величин проверить гипотезу о линейной зависимости гораздо сложнее, чем при отсутствии таких погрешностей.

Если измерения выполняются с многократными наблюдениями и погрешности измерений имеют приближенно нормальные распределения, то проверка линейности зависимости основана на сравнении двух оценок дисперсии σ_y^2. Первая оценка построена по отклонениям $y_{ij} - \bar{y}_i$ внутри групп наблюдений:

$$S_y^2 = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2,$$

а вторая — по отклонениям экспериментальных данных $\bar{y}_i$ от расчетных значений $\hat{Y}(x_i)$:

$$\tilde{S}_y^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^m \left[\bar{y}_i - \hat{Y}(x_i)\right]^2 / l_i.$$

Здесь коэффициенты l_i зависят не только от числа наблюдений n_i, но и отношения дисперсий погрешностей λ. Этот критерий подробно описан в [4].

Приведем простой приближенный критерий для проверки линейности в случае, когда известен порядок истинных значений X_i (предположения о многократных наблюдениях и о виде распределения погрешностей не вводятся) [2]. Он основан на сравнении порядка полученных чисел d_i с их порядком по возрастанию. При этом альтернативная гипотеза состоит в том, что зависимость выпукла или вогнута.

Пусть число точек четно $m = 2l$ и вычислены l отношений

$$d_i = \frac{y_{l+i} - y_i}{x_{l+i} - x_i}, \quad i = 1 \ldots l.$$

Вычисляется ранговый коэффициент корреляции Кендалла

$$\tau = \frac{2q}{l(l-1)};$$

здесь q равно числу пар (d_i, d_j), $i<j$, в которых $d_i<d_j$, минус число пар, в которых $d_i>d_j$. При выбранном уровне значимости γ гипотеза о линейной зависимости отвергается, если полученное значение τ превосходит критическое значение τ_γ [1].

Таким образом, как уже отмечалось выше, методы конфлюентного анализа дают состоятельные оценки коэффициентов линейной зависимости. Они довольно просты и требуют дополнительной информации, которая часто доступна на практике. Поэтому их можно рекомендовать для широкого применения.

Источник изменчивости	Средняя сумма квадратов	Математическое ожидание средней суммы квадратов
Погрешности наблюдений (внутригрупповые различия)	$W_x = \frac{1}{R-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$	σ_x^2
	$W_y = \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$	σ_y^2
	$W_{xy} = \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)(y_{ij}-\bar{y}_i)^{*}$	$\operatorname{cov}(v_i, \varepsilon_i)=0$
Различия между группами	$s_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum r_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2;$	$\sigma_x^2 + \frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m} r_i(X_i-\bar{X})^2;$
	$s_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2;$	$\sigma_y^2 + \frac{\beta^2}{m-1}\sum_{1}^{m} n_i(X_i-\bar{X})^2;$
	$s_{xy} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}});$	$\frac{\beta}{m-1}\sum_{1}^{m} r_i(X_i-\bar{X})^2;$
	$s_{yx} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^{**}$	$\frac{\beta}{m-1}\sum_{1}^{m} n_i(X_i-\bar{X})^2$

* Вычисляется при $r_i=n_i$; ** вычисляется при $r_i \neq n_i$

Точность получаемых этими методами оценок следует характеризовать не только дисперсией, но и смещением; можно использовать второй момент относительно истинного значения коэффициента $e(b) = M(b-\beta)^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айвазян С. А.** Статистическое исследование зависимостей. М., изд-во Металлургия, 1968.

2. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. — М., Наука, 1974.

3. **Madansky A.** The fitting of straight lines when both variables are subject to error, J. Amer. Statist. Assoc., v. 54, 1959.

4. **Айвазян С. А., Богдановский И. М.** Методы статистического исследования парных зависимостей в схемах конфлюентного анализа и их применение. — Заводская лаборатория, 1974, № 3.

Поступили в редакцию
6/VI 1979 г.

УДК 53.082.73 : 53.089.6

А. В. ЗЛОБИН

ГРАДУИРОВКА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Пьезокерамические элементы используются как измерительные преобразователи. При градуировке таких преобразователей принято считать, что удлинение пьезокерамического элемента прямо пропорционально приложенному напряжению. В то же время известно, что изменение длины пьезоэлемента не является линейной функцией от приложенного напряжения. Учет нелинейности, особенно в случае малых смещений, затруднителен. Ниже рассматривается способ градуировки пьезокерамических преобразователей при малых (до 0,7 мкм) изменениях длины.

Если при задании смещений придерживаться методики, изложенной в работе [1], то для наиболее употребительных составов пьезокерамики при напряженности электрического поля, не превышающей 10^5 В/м, удлинение можно записать в виде

$$l = AU + BU^2, \qquad (1)$$

где U — напряжение, приложенное к пьезокерамике, A и B — коэффициенты. При этом для того, чтобы погрешность градуировки не превышала 1%, необходимо учитывать коэффициент B в правой части формулы (1), характеризующий нелинейность пьезокерамического элемента. Задачей градуировки является определение коэффициентов A и B.

Градуировка пьезоэлемента осуществлялась с помощью модуляционного интерферометра Фабри-Перо [2]. Исследуемый пьезоэлемент жестко соединяется с одним из зеркал интерферометра. Интерферометр освещается излучением с длиной волны λ. Изменением напряжения постоянного тока от нуля до некоторого значения U_1 производится наведение на ближайший максимум интерференции. Затем напряжение увеличивается до значения U_2, соответствующего максимуму интерференции соседнего порядка. Если справедливо выражение (1), то смещение l_1 и l_2, соответствующие приложенным напряжениям U_1 и U_2, можно записать в таком виде:

$$l_1 = AU_1 + BU_1^2;\quad l_2 = AU_2 + BU_2^2 \qquad (2)$$

Смещения l_1 и l_2 неизвестны, но их разность

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$

известна достаточно точно (с погрешностью, равной погрешности определения длины волны). Из уравнений (2) и (3) находим

$$\frac{\lambda}{2} = A(U_2 - U_1) + B(U_2^2 - U_1^2). \qquad (4)$$

Разделив обе части уравнения (4) на $(U_2 - U_1)$, получаем уравнение вида:

$$y = A + Bx, \qquad (5)$$

где $y = \dfrac{\lambda}{2(U_2 - U_1)}$; $x = U_1 + U_2$.

Повторяя указанные операции определения U_{1i} и U_{2i} с другими длинами волн λ_i, получаем систему линейных уравнений

$$y_i = A + Bx_i, \qquad (6)$$

которая позволяет вычислить коэффициенты A и B.

Систему (6) можно получить, используя только одну длину волны λ. Для этого определение положения максимумов интерференции U_1 и U_2 необходимо производить, изменяя каким-либо образом, не влияющим на пьезокерамику, начальную длину интерферометра Фабри-Перо.

Вычисление коэффициентов A и B производилось по рекомендациям, приведенным в [3], для оценки параметров функциональной зависимости. Коэффициент B вычисляли по формуле

$$B = \frac{(S_y^2 - \alpha S_x^2) + \left[(S_y^2 - \alpha S_x^2)^2 + 4\alpha S_{xy}^2\right]^{1/2}}{2S_{xy}}, \qquad (7)$$

где $\quad S_y^2 = \Sigma (y_i - \bar{y})^2$;

$$S_x^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2,$$

$$S_{xy} = \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y});$$

$$\alpha = \sigma_y^2 / \sigma_x^2.$$

В данном случае параметр

$$\alpha = (\Delta y)^2 / (\Delta x)^2 = \left[\frac{(\Delta U_1 + \Delta U_2)\lambda}{2(U_2 - U_1)^2} \Big/ (\Delta U_1 + \Delta U_2) \right]^2 =$$

$$= \left[\frac{\lambda}{2(U_2 - U_1)^2} \right]^2 = \left\{ \frac{2}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{2(U_2 - U_1)} \right]^2 \right\}^2 = \left(\frac{2}{\lambda} y^2 \right)^2. \qquad (8)$$

При вычислениях использовались:

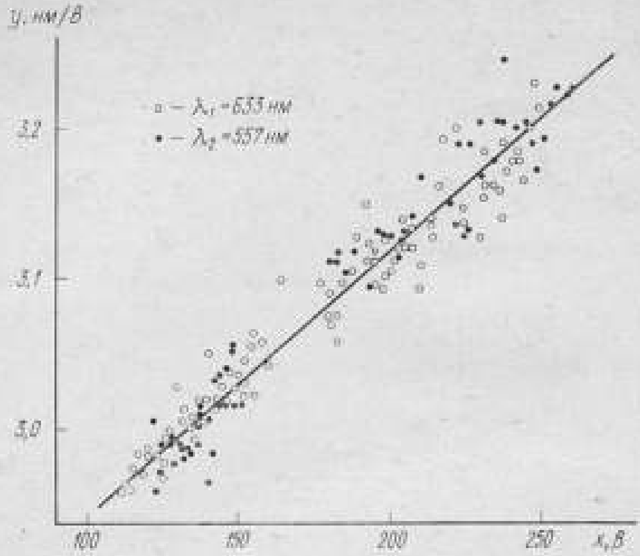
$\alpha = [2\bar{y}^2 / \lambda]^2$ — в случае, когда все измерения производились с одной длиной волны;

$\alpha = \frac{\Sigma \alpha_i n_i}{\Sigma n_i}$ — в случае, когда измерения производились с несколькими длинами волн, и длина волны λ_i применялась n_i раз.

Коэффициент A находим из уравнения

$$A = \bar{y} - B\bar{x}. \qquad (9)$$

На рисунке представлены экспериментальные значения функции $y = f(x)$ и рассчитанная по этим значениям прямая $y = A + Bx$ для пьезокерамического элемента, изготовленного в виде кольца диаметром 19 мм и высотой 30 мм из материала ЦТС-19. Расположение точек на плоскости x, y показывает, что функция $y = f(x)$ линейна, т. е. предположение о квадратичной зависимости удлинения пьезокерамики от приложенного напряжения является достаточно хорошим, если удлинение происходит в малых пределах (доли микрометра). Для коэффициентов получены следующие значения: $A = 2{,}752$ нм/В; $B = 0{,}0017$ нм/В^2.



Зависимость величины $y = \lambda/2(U_2 - U_1)$ от $x = U_1 + U_2$. Изменение длины интерферометра производилось за счет медленного изменения температуры в малых пределах.

Исследование точности статистических оценок параметров A и B, выполненное в соответствии с рекомендациями [3], показало, что относительная погрешность определения коэффициента B не превышает 10%, а коэффициента A — 0,5%.

Применение метода наименьших квадратов для вычислений коэффициентов A и B в данном случае не является корректным. Однако этот метод более прост и менее трудоемок по сравнению с описанным выше методом вычислений. Установлено, что значения коэффициентов, вычисленные обоими способами, отличаются на величину, значительно меньшую по сравнению с погрешностью определения этих коэффициентов. Например, для данных, приведенных на рисунке, $B = 0{,}001725$ нм/В², по методу наименьших квадратов $B = 0{,}001726$ нм/В². На основании этого приходим к выводу, что результаты измерений могут быть обработаны с помощью более простого метода наименьших квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **И. Ш. Эцин.** Экспериментальное исследование пьезокерамических элементов для градуировки измерительных головок. — Метрология, 1977, № 5.

2. **А. И. Карташев, И. Ш. Эцин.** Методы измерения малых изменений разности фаз в интерференционных устройствах. — УФН, т. 106, вып. 4, 1972.

3. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973.

Поступила в редакцию
6/VI 1979 г.

УДК 53.088.087:389

Л. И. ДОВБЕТА, Ж. Ф. КУДРЯШОВА,
С. Г. РАБИНОВИЧ

ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОДНОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Основной характеристикой качества измерений является погрешность результата измерения. До настоящего времени основное внимание уделялось погрешностям измерений, выполняемых с многократными наблюдениями, и соответственно — статистической обработке результатов наблюдений [1, 2]. Эти методы применительно к прямым* и косвенным** измерениям хорошо известны и основные положения их отражены в нормативной документации (ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения»). Регламентированы также способы представления результатов измерений и их погрешностей (ГОСТ 8.011-72. «ГСИ. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений»). Однако на практике в большинстве случаев измерения производятся с однократными наблюдениями.

Методы оценивания погрешностей при таких измерениях рассматриваются в литературе [3, 4]. Однако их описание недостаточно систематизировано. Данная работа посвящена обобщению и систематизации этих методов.

По источникам возникновения погрешность результата измерения при анализе делят на инструментальную, методическую и личную составляющие. Основной составляющей погрешности результата измерений с однократным наблюдением является инструментальная. Она возникает из-за несовершен-

---

* **Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович, К. А. Резник.** Рекомендации по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях. — Труды метрологических институтов СССР, 1972, вып. 134 (194).

** **Ж. Ф. Кудряшова, С. Г. Рабинович.** Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях. — Труды метрологических институтов СССР, 1975, вып. 172 (232).

ства средств измерений (СИ) и определяется метрологическими характеристиками СИ и условиями измерений.

Среди показателей точности СИ на практике используются основная и дополнительные погрешности. Кроме того, для СИ указывают ряд характеристик, описывающих те их свойства, которые являются источниками погрешностей при измерении. К ним относятся: динамические характеристики, характеристики взаимодействия СИ с объектом, функции влияния и пределы возможных отклонений от них.

Нормы для всех показателей точности устанавливаются для типа СИ. Индивидуальное описание свойств СИ применяется в следующих случаях:

— при изготовлении СИ, имеющих существенный разброс характеристик, но обладающих достаточной стабильностью, например, преобразователи давления вибростержневые (ГОСТ 18618-73);

— при необходимости использовать СИ для измерений с погрешностью, меньшей той, которую можно обеспечить, исходя из норм погрешности, установленных для данного типа СИ.

Перечень метрологических характеристик СИ приведен в ГОСТ 8.009-72 «ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений».

Основная погрешность СИ. Применяются следующие способы нормирования основной погрешности СИ:

а) устанавливают допускаемые пределы $\Delta = \pm a$; норма может указываться в виде некоторого многочлена, например, $\Delta = \pm (a + bx)$ (где a и b — постоянные, x — значение измеряемой величины);

б) указывают допускаемые пределы $\Delta = \pm a$; дополнительно указывается характеристика случайной составляющей погрешности, например, предел для вариации либо для среднего квадратического отклонения (СКО);

в) указывают допускаемые пределы систематической составляющей $\Delta = \pm \Delta_c$ и пределы допускаемого значения СКО случайной составляющей.

Дополнительные погрешности СИ указываются обычно в той же форме, что и основная (абсолютной, приведенной, относительной). Различаются следующие способы нормирования дополнительных погрешностей:

а) указывают пределы допускаемых дополнительных погрешностей в заданном диапазоне изменения влияющей величины (пределы допускаемых изменений показаний приборов, пределы допускаемых изменений выходного сигнала измерительных преобразователей). Для некоторых СИ могут нормироваться погрешности от совместного влияния нескольких величин;

б) указывают зависимость пределов допускаемой дополнительной погрешности от изменения влияющей величины. При линейной зависимости пределов погрешности от изменения влияющей величины вместо функции может указываться коэффициент, характеризующий отношение допускаемого изменения погрешности к изменению влияющей величины.

Характеристики взаимодействия, например, входное и выходное полные сопротивления измерительного устройства, позволяют оценивать составляющую погрешности результата измерения, связанную с методом измерения. Характеристики взаимодействия нормируют указанием номинальных значений и допускаемых границ отклонений или указанием их предельных значений.

Функции влияния позволяют оценить погрешности СИ при определенных значениях влияющих величин. Например, для насыщенных нормальных элементов (ГОСТ 1954-75) значение э. д. с. при всех температурах, отличных от 20°С, определяется по формуле

$$E_{t_i} = E_{20} - \left[40{,}6(t_i - 20) + 0{,}95(t_i - 20)^2 - 0{,}01(t_i - 20)^3\right] 10^{-6}\ \text{В},$$

где E_{t_i} — значение э. д. с. при температуре t_i; E_{20} — значение э. д. с. при температуре 20°С, В; t_i — температура при измерении э. д. с., °С.

Отклонение (Δ_E) э. д. с. насыщенных н. э. от значения, рассчитанного по формуле, не должно превышать значений, определенных по формуле $\Delta_E \leqslant |\Delta(t_i - 20)|$, где $\Delta \leqslant 2$ мкВ/°С.

Динамические характеристики (ДХ) СИ могут указываться в следующем виде:

а) частные ДХ, например, время успокоения τ_y; максимально допускаемое число прохождений подвижного органа отсчетного устройства через положение равновесия при установлении показаний; предельная рабочая частота и т. д. Эти характеристики позволяют охарактеризовать условия применения средства, при котором динамическая составляющая погрешности может считаться пренебрежимо малой;

б) динамическая составляющая погрешности в виде дополнительной погрешности, вызванная изменением одного из неинформативных параметров входного сигнала (либо для заданного диапазона изменения этого параметра);

в) одна из полных динамических характеристик СИ, позволяющая при заданном входном сигнале получать расчетным путем оценку динамической погрешности (ГОСТ 8.256-77).

При индивидуальном исследовании СИ обычно находят:

1) градуировочную характеристику данного СИ или систематические составляющие его погрешностей (при этом следует оценить пределы погрешности определения градуировочной характеристики или систематических погрешностей);

2) оценку СКО случайной погрешности СИ или границы доверительного интервала для случайной погрешности СИ или стандартную аппроксимацию функции распределения случайной погрешности СИ;

3) наиболее существенные функции влияния и наибольшие допускаемые изменения этих индивидуально оцененных функций влияния.

Для других индивидуально не определяемых характеристик сохраняются те нормы, которые установлены для данного типа СИ.

Рассмотрим методы оценивания составляющих погрешности результатов измерений, а затем методы оценивания погрешностей результатов измерений.

Оценивание составляющих погрешности результатов измерений, различаемых по их источникам

Инструментальная погрешность. Различают статическую и динамическую инструментальные составляющие. Статическая инструментальная погрешность в свою очередь складывается из основной погрешности СИ и дополнительных погрешностей. При нахождении погрешности результата измерения не всегда необходимо знать инструментальную погрешность в целом, иногда целесообразнее иметь ее составляющие. Составляющие можно выражать в форме относительных или абсолютных погрешностей. Поскольку в документации обычно задана приведенная погрешность, то от нее следует перейти к абсолютной или к относительной. Например, милливольтметр с верхним пределом измерения 150 мВ имеет предел приведенной погрешности 1%. Измерено напряжение 75 мВ; основная погрешность в абсолютной форме находится в пределах

$$\Delta_{осн} = \pm 0{,}01 \cdot 150 = \pm 1{,}5 \text{ мВ},$$

а в относительной форме — в пределах $\delta_{осн} = \dfrac{\pm 1{,}5 \cdot 100}{75} = \pm 2\%$.

Пределы основной погрешности СИ, как правило, устанавливаются для всей погрешности, т. е. с включением случайной составляющей. В случае необходимости оценить случайную составляющую погрешности СИ используют данные о вариации. Так, согласно ГОСТ 8711-78 вариация вольтметра кл. 1 не должна превышать 1% (по отношению к нормирующему значению, которое в данном случае равно 150 мВ). Следовательно, приведенная случайная погрешность вольтметра не превышает

0,5% (половина вариации), а относительная случайная погрешность прибора на отметке 75 мВ лежит в пределах $\pm 1\%$.

Если известны номинальные функции влияния, то при известных влияющих величинах можно вычислить поправки ∇ к результату измерения:

$$\nabla = f(Q_i - Q_н), \qquad (1)$$

где $f(Q)$ — функция влияния; $Q_н$ — нормальное значение влияющей величины; Q_i — значение влияющей величины при измерении.

Однако и после внесения поправок остаются погрешности, которые должны быть оценены.

Динамическая погрешность становится значительной при определенном соотношении между скоростью изменения измеряемой величины и характеристиками СИ. Заметим, что оценивание отдельных (мгновенных) значений изменяющейся величины может рассматриваться как ряд последовательных измерений. Динамическая погрешность рассматривается как дополнительная погрешность СИ от изменения неинформативных параметров входного сигнала в тех случаях, когда известна типовая форма входных сигналов и могут быть заданы границы отклонений отдельных параметров формы от номинальных значений; например, частотная погрешность вольтметров для измерения эффективного синусоидального напряжения, дополнительная погрешность вольтметров для измерений импульсных напряжений от искажений формы импульсов входного сигнала. В этих случаях градуировка СИ производится при соответствующем переменном входном сигнале.

В тех случаях, когда нормировать динамическую погрешность СИ как дополнительную (при большом диапазоне изменений частотного спектра измеряемой величины) не представляется возможным, прибегают к расчету с использованием математических моделей входного сигнала и полных динамических характеристик СИ. При этом оценки погрешности будут тем точнее, чем более точно известны динамические характеристики СИ и модели сигналов [5].

В тех случаях, когда не удается достаточно просто выразить в аналитической форме характеристики СИ или входной сигнал, но имеются их графические изображения, например, осциллографическая запись импульсной или переходной характеристики СИ или реализации входного сигнала, задачу нахождения погрешности решают с помощью моделирования на ЭВМ.

Для динамической погрешности обычно находят предел возможной погрешности или СКО, определяющие возможный разброс результатов измерений при возможном изменении параметров сигналов или при сигналах определенной структуры (т. е. определенной автокорреляционной функцией или спектральной плотностью).

Оценивание методической погрешности. Методическая погрешность появляется из-за несовершенства метода измерений. Например, при измерении вольтметром падения напряжения на участке электрической цепи появляется составляющая погрешности от изменения тока в цепи из-за присоединения прибора, зависящая от соотношения сопротивления участка цепи и прибора. Методические погрешности очень разнообразны, и поэтому привести исчерпывающий их перечень невозможно.

Среди них могут быть указаны наиболее часто встречающиеся, а именно: погрешности, возникающие вследствие влияния СИ на исследуемый объект; погрешности, вызываемые недостаточным знанием всех обстоятельств измерения; погрешности из-за несоответствия модели исследуемого объекта самому объекту; погрешности, обусловленные применением эмпирических формул (при косвенных измерениях).

Примером влияния, которое оказывает недостаточное знание обстоятельств измерений на погрешность, может служить измерение влажности зерна электрическими влагомерами: результаты измерений зависят не только от влажности, но и от состава и структуры зерна, даже для одного и того же сорта. Примером погрешности из-за неточности математической модели исследуемого объекта может служить погрешность нахождения концентрации компонента путем измерения плотности вещества, возникающая из-за наличия примесей в исследуемом образце вещества.

В основном методические погрешности являются систематическими. Их оценивание проводится главным образом путем измерения одной и той же величины разными методами. Методическая погрешность должна быть оценена предварительно и при необходимости в методике измерений должно быть указано, как ее следует устранять.

Оценивание личных погрешностей. Для современных СИ характерно снижение личных погрешностей при измерениях. Однако при измерениях с однократными наблюдениями эти погрешности могут быть существенными в отдельных случаях.

Личные погрешности разделяются на погрешности наблюдения, появляющиеся при отсчитывании показаний, визировании штрихов оператором, и на погрешности действия, вносимые оператором при установке средств измерений, перемещении измерительных наконечников и т. п.

Личные погрешности наблюдения могут быть оценены по данным о шкале прибора. Обычно считают, что погрешность отсчитывания показаний составляет 0,5 деления. Однако если длина делений шкалы составляет примерно 1 мм, то личная погрешность может достигать 0,2 цены деления. Для разных наблюдателей она обычно считается случайной. Личные погрешности действия иногда указываются в технической документации. Известно, что при измерении микрометром оператор может создавать усилие до 30 Н; при этом от разгиба скобы может появиться погрешность 0,01—0,03 мкм. Личные погрешности действия возникают и при составлении блока концевых мер. Установлено, что при притирке двух концевых мер эта погрешность достигает 0,2 мкм, а при притирке трех мер — 0,3 мкм. Для блоков с размерами до 500 мм эта погрешность может достигать 0,5 мкм*.

Погрешность результата при измерении с однократным наблюдением находят путем суммирования составляющих. При суммировании существенное влияние на погрешность результата измерения может оказать погрешность округления.

По своим свойствам погрешности разделяются на систематические и случайные. При наличии сведений о систематических и случайных составляющих целесообразно при оценивании погрешности результата измерения суммировать отдельно систематические и отдельно случайные составляющие без промежуточного оценивания всей инструментальной и других составляющих.

Оценивание составляющих погрешности результатов измерений, различаемых по их свойствам

Систематическая составляющая погрешности. Систематическая погрешность результата измерения складывается из систематических погрешностей различных составляющих. Систематические погрешности составляющих частично могут быть оценены по условиям измерения и устранены путем введения поправок. Однако такой учет не всегда возможен; даже при их оценке и введении поправок нельзя полностью устранить эти погрешности — остаются их неисключенные остатки, определяемые погрешностями оценивания поправок.

Для систематических погрешностей указываются пределы допускаемых значений $\pm\Theta_i$. При суммировании систематических погрешностей можно получить ориентировочную оценку погрешности результирующей

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i . \qquad (2)$$

Такая оценка является завышенной. Более точную получают методами статистического суммирования составляющих. При

---

* **Н. Н. Марков, Г. Б. Кайнер, П. А. Сацердотов.** Погрешность и выбор средств при линейных измерениях. — М., Машиностроение, 1967.

этом имеется в виду, что по множеству возможных реализаций измерения систематическая погрешность может рассматриваться как случайная величина. Обычно принимают гипотезу о равномерном распределении каждой систематической погрешности в пределах Θ_i. Тогда оценка

$$\theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2}\,, \qquad (3)$$

где k — коэффициент, зависящий от доверительной вероятности. При α, равном 0,9; 0,95; 0,98 и 0,99, коэффициент k будет соответственно 0,95; 1,1; 1,3 и 1,4.

При доверительной вероятности $\alpha=0{,}99$ значение коэффициента k может быть уточнено в зависимости от отношения $r=\Theta_1/\Theta_2$ и числа составляющих m (где Θ_1 — границы наиболее отличающейся от остальных систематической погрешности; Θ_2 — границы ближайшей к Θ_1 составляющей) с помощью графика, приведенного в [3]. Коэффициент k можно также вычислить по аппроксимирующей формуле*:

$$k = 1{,}45 - 0{,}05\,\frac{\theta_1}{\theta_2}\,. \qquad (4)$$

Примечание. Для вероятности 0,99 и $m \geqslant 5$ границы результирующей систематической погрешности можно также находить по формуле

$$\theta = z_q S_\upsilon\,, \qquad (5)$$

где z_q — квантиль нормального распределения, соответствующая доверительной вероятности α; $q=1-\alpha$; S_υ — оценка результирующего СКО

$$S_\upsilon = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2}\,. \qquad (6)$$

Разница между получаемой оценкой и оценкой по формуле (3) не превышает 10% [3].

Отметим, что методы оценивания систематической составляющей являются общими для измерений с однократными и многократными наблюдениями.

Случайная составляющая погрешности. Случайная погрешность результата измерения складывается из случайных составляющих инструментальной, методической и личных погрешностей. Методы расчета случайной погрешности результата изме-

---

* **С. Г. Рабинович.** Методы оценивания погрешностей измерений. — Труды метрологических институтов СССР, вып. 237 (297).

рения зависят от способа представления ее составляющих. В тех случаях, когда для случайных погрешностей составляющих известны границы $\Delta_{\varepsilon i}$, то для их суммирования принимают гипотезу о равномерном распределении погрешности в заданных границах и оценку их суммы получают по аналогии с суммированием систематических погрешностей.

Если для случайных погрешностей составляющих известны СКО, то обычно можно считать, что результирующая погрешность имеет нормальное распределение и оценка доверительных границ погрешности

$$\Delta_{\varepsilon}(\alpha) = z_q \sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2}, \qquad (7)$$

где z_q — квантиль нормального стандартного распределения, соответствующий заданному уровню вероятности.

Если для погрешностей известны гистограммы или функции распределения $F(\varepsilon_i)$, то функцию распределения случайной погрешности результата измерения находят путем построения композиции распределений

$$F(\varepsilon) = F(\varepsilon_1) * F(\varepsilon_2) * F(\varepsilon_3).$$

Методы нахождения композиции распределений описаны в литературе.

На практике встречаются случаи, когда составляющие случайной погрешности представлены по-разному, т. е. для одной указаны границы допускаемы значений, для другой — оценка СКО, для третьей — аппроксимация функции распределения и т. д. В этих случаях для нахождения оценок результирующей погрешности необходимо выразить все составляющие одинаковым образом.

Об оценивании погрешностей результатов измерений. Априорные оценки погрешности, получаемые при планировании измерений, являются предварительными. После выполнения измерения иногда следует получить апостериорные оценки на основании данных о конкретных условиях измерения.

Например, у электроизмерительных приборов кл. 1,5 изменение показаний, вызванное отклонением температуры окружающей среды от нормальной (+20° С), не должно превышать ±1,5% на каждые 10° С изменения температуры (ГОСТ 1845-59). Если условия измерений таковы, что температура может подниматься до 40°С, то априорная оценка границ дополнительной температурной погрешности будет вычислена для отклонения температуры на +20° С:

$$\Delta_t = \frac{40-20}{10} 1{,}5 = \pm 3\%.$$

Если в действительности при измерении температура не превысила $+30°$, то после измерения границы дополнительной погрешности могут быть уточнены

$$\Delta t = \frac{30-20}{10} 1{,}5 = \pm 1{,}5\%.$$

Если априорная оценка погрешности результата меньше или близка к допускаемой, то методика и СИ остаются без изменений. При этом возможно некоторое превышение допускаемой погрешности, поскольку при конкретном измерении влияющие величины не обязательно будут иметь наибольшие значения, а измеряемая величина может оказаться в диапазоне, где СИ имеет меньшую погрешность, чем предполагалось (допускаемое превышение определяется в каждом случае отдельно).

Если априорная оценка погрешности результата существенно превышает допускаемую погрешность измерения, то необходимо провести анализ составляющих погрешности, выявить доминирующую и ее уменьшить.

Если доминирует методическая составляющая, то следует усовершенствовать метод измерения. Если доминирует инструментальная составляющая и существенна основная погрешность, то следует выбрать другое СИ с меньшей основной погрешностью. Если существенны дополнительные погрешности, то, в первую очередь, следует выявить возможность снижения влияния влияющих величин.

В случаях, когда возможности замены СИ ограничены и не удается снизить внешние влияния, а априорные оценки составлены на основе типовых метрологических характеристик СИ, могут быть уточнены метрологические характеристики имеющегося СИ путем его индивидуального исследования.

Апостериорное оценивание погрешности результата измерения выполняется в тех случаях, когда условия измерения либо значение измеряемой величины существенно отличаются от предполагавшихся при подготовке измерения. Может оказаться, что погрешность измерения Δ меньше допустимой $\Delta_{доп}$, равна $\Delta_{доп}$ или больше нее. Если $\Delta \leqslant \Delta_{доп}$, то методика измерения правильна. Если $\Delta > \Delta_{доп}$, то методика измерения должна быть усовершенствована. Для этого необходимо выполнить анализ составляющих погрешности.

Методы нахождения погрешности результата измерения зависят от способов выражения ее составляющих. Если известны пределы погрешностей (и не выделены систематические и случайные составляющие), вычисление погрешности результата измерения выполняется так же, как ее систематической составляющей.

Если известны оценки систематической и случайной составляющей погрешности, то вычисление погрешности результата измерения выполняется так, как указано в ГОСТ 8.207-76. В [4] изложен другой метод* оценивания систематической составляющей. Однако для этого требуются сведения о статистических свойствах СИ, которые обычно неизвестны.

При оформлении результатов измерений необходимо, в первую очередь, оценить нужное количество разрядов числового значения результата; правила округления известны.

Оформление результатов в целом регламентировано ГОСТ 8.011.72. Дополнительно нужно предусматривать возможность представления погрешности в форме интервала, в котором находится погрешность измерения, без указания вероятности. Такой способ используется при указании погрешности, которая получена без суммирования составляющих, когда она определяется основной погрешностью СИ. В этом случае предполагается достаточно высокая доверительная вероятность для границ интервала погрешности, однако указать ее значение невозможно, да и в этом нет практической необходимости. Поскольку подобная ситуация часто встречается при измерениях с однократными наблюдениями, то ее нельзя игнорировать, и одним из способов представления погрешности результатов измерений следует считать указание границ погрешности (без доверительной вероятности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии. Изд. Комитета по делам мер и приборов при СМ СССР. Коммерприбор, 1949.

2. **Бурдун Г. Д., Марков Б. Н.** Основы метрологии. М., Изд. стандартов, 1975.

3. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений. М.-Л., Энергия, 1978.

4. **Миф Н. П.** Модели и оценка погрешностей технических измерений. М., Изд. стандартов, 1976.

5. **Широков К. П.** и др. Основные понятия теории динамических измерений. — Измерительная техника, 1975, № 12.

Поступила в редакцию
6/VI 1979 г.

* См. также «Методические материалы по применению ГОСТ 8.009-72». М., Изд. стандартов, 1976.

УДК 53.087:389

Л. И. ДОВБЕТА

ОБ УСЛОВИЯХ ВЫПОЛНЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ С ОДНОКРАТНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

По количеству наблюдений все измерения разделяются на измерения с однократными наблюдениями и измерения с многократными наблюдениями [1]. На выполнение каждого наблюдения затрачивается определенное время и средства, а получение результата измерения и оценивание его погрешности при измерениях с многократными наблюдениями связано кроме того с необходимостью обработки результатов наблюдений. Поэтому на практике стремятся проводить измерения с однократными наблюдениями; иногда повторить наблюдение невозможно, например, при измерениях параметров явлений, связанных со взрывом, или в экспериментах, выполняемых при разрушении измерительных устройств. Но когда можно осуществить измерение с однократным наблюдением и получить результат, имеющий объективную ценность, не установлено. В статье сделана попытка решить эту задачу.

Для определения условий, при которых возможны измерения с однократными наблюдениями, рассмотрим исходные положения планирования измерений. При формулировании измерительной задачи должен быть проведен анализ данных об объекте исследования, исходя из цели измерения, для определения на математической модели объекта параметра (физической величины), подлежащего измерению, и требуемой точности измерения [2, 3]. Отметим, что принятая математическая модель должна быть адекватна исследуемому объекту с учетом специфики той задачи, для решения которой она применяется.

При подготовке измерения необходимо выполнить анализ априорных данных о физической величине с целью уточнения определения измеряемой величины и вида входного сигнала средства измерения*. Например, при измерениях напряжений

* По мнению авторов, измеряемая величина может представлять собой как физическую величину, так и параметр, функционал от физической величины.

переменного тока необходимо располагать сведениями о форме кривой напряжения, определить его параметр, подлежащий измерению (измеряемую величину): среднее, пиковое, среднее квадратическое напряжение. Необходимо также иметь данные о диапазонах возможных значений измеряемой величины и влияющих величин. При наличии указанных данных становятся возможным выбор средств измерений (СИ) и определение (или выбор) методики измерения.

При измерении СИ приводится во взаимодействие с исследуемым объектом, при этом на выходе СИ появляется сигнал, отражающий входное воздействие. Понятие «сигнал» вводится в связи с кибернетике и определяется как «изменяющаяся физическая величина, отображающая сообщение» [3]. При строгом подходе этот термин неприменим для СИ, особенно для описания взаимодействия объекта и СИ, так как понятие «сигнал» связано с понятием «сообщение» и применяется для обозначения целенаправленных, выполняемых по определенному алгоритму изменений носителя сигнала. Поэтому применительно к СИ правильнее говорить о «входном воздействии» на СИ (точнее на чувствительный элемент первичного измерительного преобразователя измерительной цепи СИ).

Входные воздействия и сигналы в измерительной цепи СИ описываются с помощью математических моделей. Вид модели определяется объектом исследования, его устройством и назначением. Неудовлетворительность той или иной модели не всегда может быть определена по результатам измерений, окончательно она устанавливается на практике, по результатам использования реальных объектов. Модель входного воздействия связана с моделью исследуемого объекта и может рассматриваться как часть этой модели.

Перейдем к проблеме обоснования возможности выполнения измерений с однократными наблюдениями. Вообще целесообразнее было бы выполнять измерение с однократным наблюдением. Однако при повторении данного измерения может выявиться расхождение результатов измерений. В этом случае может появиться необходимость проведения измерения с многократными наблюдениями.

Расхождение результатов повторных измерений может быть вызвано следующими причинами:

1) неадекватностью принятой модели исследуемому объекту. Например, если при измерении диаметра вала считают его сечение круглым, а в действительности при требуемой точности измерений оно может оказаться эллипсовидным. В принятой модели может быть не учтено существенное влияние на измеряемую величину, например, при измерении влажности зерна электрическим влагомером — вид зерна (пшеница, рожь)*.

* **Н. И. Тюрин.** Введение в метрологию. М., Изд. стандартов, 1973.

2) изменением измеряемой величины за время между измерениями. Эти изменения могут быть не учтены при подготовке измерения, т. е. не отражены в математической модели входного воздействия. При этом модель этого воздействия может быть верной для ограниченного временного интервала, в течение которого выполняется измерение, но недостаточно точной за пределами этого интервала. В частности, могут быть не учтены изменения влияющих величин;

3) существенностью случайной составляющей погрешности измерения. Таким образом, при подготовке измерений необходимо иметь в виду все перечисленные причины.

Как уже отмечалось, неадекватность модели в общем не может быть обнаружена по результатам измерений, однако возможны случаи проверки адекватности, например, при измерении диаметра диска [5]. Такая проверка возможна, когда известно, что случайная составляющая погрешности измерения мала. Аналогичным образом можно обнаружить изменения входного сигнала между повторными измерениями.

В целом экспериментатор может быть уверен в адекватности модели объекту и правильности определения измеряемой величины только при наличии данных о большом количестве подобных измерений в прошлом при позитивном опыте использования результатов этих измерений на практике.

Иногда расхождение повторных результатов измерений возникает из-за недостаточной отработанности методики измерений; в этом случае стремятся выполнить несколько измерительных наблюдений с тем, чтобы исключить промахи, повысить надежность результата. Заметим, что расхождение результатов измерений иногда может быть предсказано априори при планировании измерения.

Таким образом, измерения с однократными наблюдениями возможны с заданной точностью при соблюдении следующих условий:

1) экспериментатор уверен в адекватности математической модели исследуемому объекту, ее соответствии решаемой задаче и в правильности определения измеряемой величины;

2) имеется достаточно данных об измеряемой величине: диапазоне ее возможных значений, скорости изменения, а также о возможных значениях влияющих величин;

3) случайная составляющая погрешности результата измерения либо несущественна по сравнению с систематической, либо заведомо известно, что случайная погрешность не превышает некоторой границы, допустимой по измерительной задаче. Последнее условие выясняется экспериментатором на основе физических соображений. Например, измерение напряжения с помощью вольтметра на кернах. Известно, что у некоторых приборов (ударопрочные приборы) погрешность в основном случайная, не выходящая за пределы допускаемой

основной погрешности прибора. Тогда в нормальных условиях и при отсутствии методической составляющей погрешность результата будет определяться основной погрешностью прибора. Если эта погрешность не больше допускаемой, то при измерении достаточно одного наблюдения.

Следовательно, при подготовке измерения нужно иметь в виду все указанные выше причины возможного расхождения результатов при повторении данного измерения. При необходимости следует проверить адекватность модели исследуемому объекту, уточнить вид входного воздействия; для этого иногда проводятся предварительные измерения.

При наличии существенной случайной погрешности следует выбрать другое СИ (или метод измерения). Если это невозможно, то необходимо перейти к измерению с многократными наблюдениями. При этом влияние случайной составляющей погрешности снижается благодаря статистической обработке результатов наблюдений.

Таким образом, при подготовке измерения с однократным наблюдением, особенно в тех случаях, когда повторить наблюдение невозможно, необходимо добиваться соблюдения указанных выше условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Долинский Е. Ф.** Обработка результатов измерений. М., Изд. стандартов, 1973.

2. **Грановский В. А., Рабинович С. Г.** Автоматизация экспериментов и вопросов методологии измерений.—В кн.: Методы и средства автоматизации научного эксперимента. (Инф. сборник). М., ЦНИИТЭИприборостроения, 1972.

3. **Земельман М. А.** О методических и инструментальных погрешностях измерений. — Измерительная техника, 1979, № 3.

4. Элементы технической кибернетики. Терминология. АН СССР, М., Наука, 1973.

5. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений. М.-Л., Энергия, 1978.

Поступила в редакцию
6/VI 1979 г.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТЫ ПУБЛИКУЕМЫХ СТАТЕЙ

УДК 53.087.92.089.6

Основные задачи, связанные с построением градуировочных характеристик измерительных преобразователей. Рабинович С. Г., Сирая Т. Н.— «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях». Труды метрологических институтов СССР, вып. 242 (302), 1979, с. 3—16.

Сформулированы основные задачи, связанные с построением градуировочных характеристик (ГХ) в аналитическом виде. Указана рациональная последовательность операций по построению ГХ. Получены формулы для оценивания погрешностей ГХ с учетом систематических погрешностей измерений входных и выходных величин. Табл. 2. Библ. 3.

УДК 53.088.089.6 : 519.281.2

Условия применения метода наименьших квадратов и оценивание погрешностей при построении градуировочных характеристик. Рабинович С. Г., Сирая Т. Н.— «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях». Труды метрологических институтов СССР, вып. 242 (302), 1979, с. 17—32.

Анализируется применение метода наименьших квадратов для построения градуировочных характеристик (ГХ) в случаях, когда имеются погрешности измерений входной величины, а также когда существенны систематические составляющие погрешностей измерений входной и выходной величин. Излагается построение линейных, полиномиальных и приводимых к линейным ГХ. Получены формулы для оценивания построенных ГХ с учетом систематических погрешностей измерений. Приводятся примеры. Табл. 3. Библ. 4.

УДК 519.28 : 512.86

Методы конфлюентного анализа для построения линейных зависимостей. Сирая Т. Н.— «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях». Труды метрологических институтов СССР, вып. 242 (302), 1979, с. 33—44.

Приведены основные методы конфлюентного анализа и даны условия их применения Эти методы целесообразно применять для построения линейных зависимостей $Y=a+bX$ в тех случаях, когда наряду с погрешностями измерений значений Y существенны также погрешности измерений значений X (и метод наименьших квадратов неприменим). Табл. 1. Библ. 4.

УДК 53.082.73 : 53.089.6

Градуировка пьезокерамических элементов в статическом режиме. Злобин А. В. — «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях». Труды метрологических институтов СССР, вып. 242 (302), 1979, с. 45—48.

Предлагается способ градуировки пьезокерамических элементов, применяющихся в качестве электромеханических преобразователей, в предположении, что удлинение l пьезокерамического элемента определяется функцией $l=AV+BU^2$, где U — приложенное напряжение, A и B — постоянные коэффициенты. Приведены экспериментальные данные, показывающие, что при малых — доли микрометра — смещениях это предположение является достаточно правильным. Ил. 1. Библ. 3.

УДК 53.088.087 : 389

Оценивание погрешностей результатов прямых измерений с однократными наблюдениями. Довбета Л. И., Кудряшова Ж. Ф., Рабинович С. Г. — «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях». Труды метрологических институтов СССР, вып. 242 (302), 1979, с. 49—59.

Рассматриваются методы оценивания систематической и случайной составляющих погрешности результатов прямых измерений с однократными наблюдениями. Систематизированы способы описания показателей точности средств измерений. Излагаются методы оценивания погрешности результатов прямых измерений. Библ. 5.

УДК 53. 087 : 389

Об условиях выполнения измерений с однократными наблюдениями. Довбета Л. И. — «Методы обработки результатов наблюдений при измерениях». Труды метрологических институтов СССР, вып. 242 (302), 1979, с. 60—63.

Рассматриваются исходные положения подготовки измерений, выясняются основные причины расхождения результатов повторных измерений. Устанавливаются условия, при которых возможны измерения с однократными наблюдениями. Библ. 5.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Труды метрологических институтов СССР
Вып. 242 (302)

Редактор *И. А. Шайкевич*
Технический редактор *З. Г. Мамонова*
Корректор *И. Л. Перескокова*

Сдано в набор 7.08.79. Подписано к печати 24.12.79. М-29371
Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага типогр. № 2. Усл.-печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,5.
Тираж 1000. Заказ 7080. Цена 50 коп.

СППО-2, Парголово, ул. Ломоносова, д. 115

Цена 50 коп.